

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA CAMADA
LIMITE TÉRMICA TURBULENTA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

DYLTON DO VALE PEREIRA FILHO

FLORIANÓPOLIS
DEZEMBRO DE 1984

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA CAMADA
LIMITE TÉRMICA TURBULENTA

DYLTON DO VALE PEREIRA FILHO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA

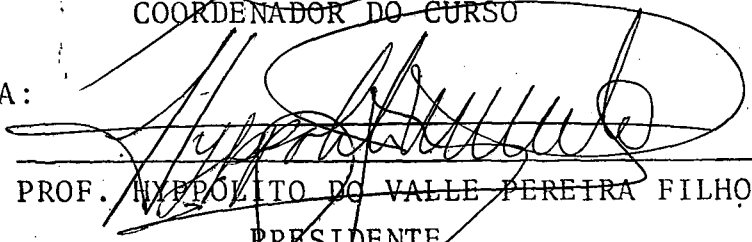
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL
PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



PROF. HYPOOLITO DO VALLE PEREIRA FILHO, Ph.D.
ORIENTADOR

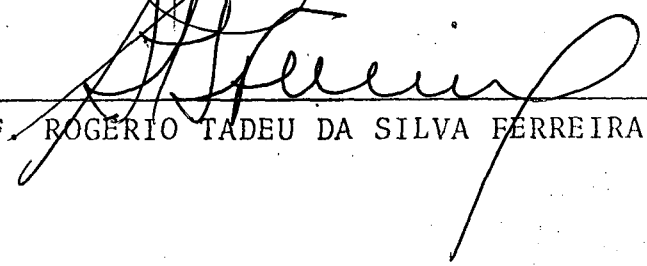
PROF. CLÓVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D.
COORDENADOR DO CURSO

BANCA EXAMINADORA:



PROF. HYPOOLITO DO VALLE PEREIRA FILHO, Ph.D.
PRESIDENTE

PROF. CLÓVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D



PROF. ROGÉRIO TADEU DA SILVA FERREIRA, Ph.D.

À minha esposa Kari

Ao meu irmão Paulo de Tarso

Aos meus pais.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao orientador, Prof. Hyppólito do Valle Pereira Filho, pelo apoio e dedicação dispensados;

Ao Departamento de Engenharia Mecânica, pelo suporte financeiro;

Ao Núcleo de Processamento de Dados, pela execução dos trabalhos computacionais;

À Rita de Cássia Broering Nascimento, pela datilografia;

À Kari Avila do Vale Pereira, pelo apoio dedicado ao longo do período de mestrado;

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

Í N D I C E

Pág.

SIMBOLOGIA	viii
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiv

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO	1
---------------------	---

CAPÍTULO 2

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	9
2.1. Problema Proposto	9
2.2. Equações Gerais	10
2.2.1. Equação da Conservação da Massa	10
2.2.2. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento..	12
2.2.3. Equação da Energia Cinética Turbulenta	15
2.2.4. Equação da Taxa de Dissipação da Energia Cinética Turbulenta	18
2.2.5. Equação da Energia	20
2.3. Sistema de Equações	22
2.4. Condições de Fechamento	24
2.5. Modelo Matemático para a Viscosidade Turbulenta e o Coeficiente de Difusão Térmica Turbulenta	27
2.6. Equações para um Escoamento Bidimensional Elíptico	31
2.7. Equações Bidimensionais para a Camada Limite Turbulenta	33
2.8. Condições de Contorno	35

	Pág.
<u>CAPÍTULO 3</u>	
3. ALGORITMO NUMÉRICO	40
3.1. Equações Adimensionais	40
3.2. Modelo Computacional em Diferenças Finitas	46
3.3. Fluxograma	53
<u>CAPÍTULO 4</u>	
4. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS	55
4.1. Introdução	55
4.2. Análise do Ajuste da Hipótese da Viscosidade Turbulenta	55
4.3. Ajuste da Transformação do Sistema de Coordenadas	58
4.4. Discussão dos Resultados	59
4.5. Análise dos Perfis Obtidos	61
4.5.1. Velocidade	61
4.5.2. Temperatura	70
4.5.3. Energia Cinética Turbulenta	79
4.5.4. Taxa de Dissipação	82
4.6. Comportamento da Viscosidade e do Coeficiente de Difusão Térmica Turbulentos	86
4.7. Análise de Parâmetros Auxiliares	90
4.7.1. Coeficiente de Fricção	90
4.7.2. Fator de Forma	93
4.8. Análise dos Números Característicos do Escoamento	96
4.8.1. Número de Nusselt	96
4.8.2. Número de Stanton	100
4.8.3. Número de Prandtl	102

Pág.

4.9.	Análise dos Balanços nas Equações do Problema	105
4.9.1.	Equação da Energia Cinética Turbulenta	106
4.9.2.	Equação da Taxa de Dissipação da Energia Cinética Turbulenta	107
4.9.3.	Equação da Energia	109
4.10.	Relação entre Temperatura e Velocidade	115

CAPÍTULO 5

5.	CONCLUSÃO E SUGESTÕES	118
5.1.	Conclusão	118
5.2.	Sugestões	120
	BIBLIOGRAFIA	122

APÊNDICES

APÊNDICE A - ANÁLISE DA ORDEM DE GRANDEZA	127
APÊNDICE B - ANÁLISE DE PRODUTOS DE FLUTUAÇÕES	140
APÊNDICE C - ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES	144
APÊNDICE D - DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES	158
APÊNDICE E - PERFIS DAS VARIÁVEIS NUM PONTO x_0	174
APÊNDICE F - PARÂMETROS AUXILIARES	181
APÊNDICE G - NÚMEROS CARACTERÍSTICOS	186

S I M B O L O G I A

VARIÁVEIS

u	- Velocidade segundo a direção do escoamento
v	- Velocidade segundo a direção perpendicular ao escoamento
U	- Velocidade no escoamento potencial
u_*	- Velocidade de fricção
V	- Velocidade definida pela equação (C.14)
x	- Eixo coordenado na direção do escoamento
y	- Eixo coordenado perpendicular a direção do escoamento
ξ	- Forma adimensional do sistema coordenado
η	- Forma adimensional do sistema coordenado
T	- Temperatura no escoamento
θ	- Forma adimensional da temperatura
q	- Energia cinética turbulenta
D	- Taxa de dissipação da energia cinética turbulenta
p	- Pressão
ϕ	- Forma adimensional da pressão
b	- Força de campo na equação (2.7)

PROPRIEDADES

ρ	- Massa específica	(kg/m ³)
μ	- Viscosidade absoluta	(kg/ms)
ν	- Viscosidade cinemática	(m ² /s)
h_e	- Entalpia do fluido na equação (2.46)	(kJ/kg)
C_p	- Calor específico a pressão constante	(kJ/kg K)
k	- Condutibilidade térmica do fluido	(kW/m K)

- ϵ_m - Viscosidade turbulenta no escoamento (m^2/s)
 ϵ_h - Coeficiente de difusão térmica turbulenta (m^2/s)

GRUPOS ADIMENSIONAIS

- Nu - Número de Nusselt
 Pe - Número de Péclet
 Pr - Número de Prandtl
 Re - Número de Reynolds
 St - Número de Stanton

CONSTANTES

- θ_A - Constante da Equação (2.61)
 C_1 - Constante da Equação (2.64)
 C_2 - Constante da Equação (2.65)
 C'_3 - Constante da Equação (2.66)
 A' - Constante da Equação (2.79)
 a - Constante da Equação (2.81)
 b' - Constante da Equação (2.81)
 A, B, C, D - Constantes das Equações (3.34) a (3.38) obtidas do Apêndice D, relacionando valores conhecidos com o perfil a ser calculado

OUTROS SÍMBOLOS

- δ - Espessura da camada limite
 F - Relação definida na equação (3.13)
 P - Relação definida na equação (3.14)
 ℓ - Escala de turbulência na equação (2.73)

- h - Coeficiente de convecção
- H - Fator de forma
- q_t - Fluxo de calor na parede
- q_t^* - Forma adimensional do fluxo de calor na parede
- α - Difusibilidade térmica do fluido
- L_1 - Escala referencial de grandeza na direção do escoamento
- L_2 - Escala referencial de grandeza na direção perpendicular ao escoamento
- ϕ - Função genérica do problema
- G, g - Relações entre as constantes A , B , C e D , que permite obter o perfil de uma variável no ponto subsequente, conforme a equação (3.39)
- BK - Coeficiente de crescimento do incremento em η
- n - Coeficiente de ξ , conforme equação (3.7)
- NP - Número de pontos necessários para percorrer a espessura da camada limite
- $\Delta()$ - Incremento de uma variável
- $O()$ - Ordem de grandeza de uma variável ou um termo
- δ^* - Espessura de deslocamento
- θ_1 - Espessura de quantidade de movimento
- δ_{ij} - Delta de Kronecker
- e_{ij} - Taxa de deformação do fluido em escoamento
- τ - Tensão cisalhante
- λ - Microescala de turbulência
- α_v - Critério de convergência na velocidade
- α_T - Critério de convergência na temperatura
- βq - Fator de fluxo de calor

ÍNDICES

SUPERIORES

- - Valor médio da variável
- ' - Valor da flutuação da variável
- + - Variável adimensionalizada em relação a $y^+ = \frac{yu_*}{\nu}$

INFERIORES

- $()_{ijk}$ - Eixos coordenados na notação tensorial
- $(),_{ijk}$ - Derivada de uma função segundo as direções coordenadas na notação tensorial
- ∞, δ - Relativo à região externa a camada limite turbulenta
- p - Relativo a parede
- t - Turbulento
- 0 - Referência inicial
- x - Função variável ao longo do escoamento, calculada no ponto x

R E S U M O

O objetivo deste trabalho é o cálculo da Camada Limite Térmica, de um escoamento incompressível, turbulento, não isotérmico, sujeito a um gradiente de pressão variável, usando as equações da Conservação da Massa, Quantidade de Movimento, da Energia, da Energia Cinética Turbulenta e da Taxa de Dissipação da Energia Cinética Turbulenta.

Nestas equações, que são não lineares, o caráter aleatório do escoamento turbulento origina vários termos devido ao produto de flutuações dos parâmetros que o caracterizam. Isto cria a necessidade de modelagem matemática para se expressar estes termos em função das características médias do escoamento, tal que o número de incógnitas e de equações do sistema seja igual.

Desta forma, para a solução do sistema, é proposto um algoritmo numérico que permita obter a solução numérica do problema.

O desenvolvimento deste algoritmo numérico, aplicável ao modelo matemático, que representa o problema físico proposto, permitirá a obtenção do comportamento da Velocidade, Temperatura, Energia Cinética Turbulenta e Taxa de Dissipação da Energia Cinética Turbulenta na Camada Limite, que representam o resultado deste trabalho.

Estes resultados obtidos apresentam valores satisfatórios sendo que o erro máximo apresentado não é maior do que 10%, em relação a valores experimentais tidos como padrão. Outros resultados locais derivados dos perfis anteriores, tais como número de

Nusselt, número de Stanton, número de Reynolds, Fator de forma, Coeficiente de fricção, Tensão Turbulenta apresentam valores cujos erros em relação a valores experimentais, estão numa faixa aceitável.

A hipótese utilizada para a Viscosidade Turbulenta, ao ser comparada com a hipótese de Van-Driest, mostrou-se semelhante a ela, tendo como vantagem a continuidade de seu perfil.

A B S T R A C T

The main objective of this work is the development of a numerical algorithm for the computation of a turbulent thermal boundary layer.

The algorithm basically consists in the solution of five non-linear partial differential equations.

Since those equations form a non-linear system for which a solution is not analytically available, they were linearized, discretized by an appropriate finite difference technique and finally solved by an algebraic numerical method.

The five equations, which form the main scope of the algorithm are: mass, momentum and thermal energy conservation, turbulent kinetic energy and rate of dissipation of turbulent kinetic energy.

Since in those equations there are many higher order moments, it becomes necessary to model several terms. The proportionality of the gradients to the average quantities of the turbulent motion has been used for the necessary modelling.

Several cases were solved, such as, flow with adverse and favorable pressure gradients and with temperature and heat flux specified at the boundary.

All the results thus far obtained have confirmed that the algorithm here developed is a powerful tool for numerical analysis of turbulent flows.

C A P Í T U L O 1

INTRODUÇÃO

O estudo do escoamento de fluidos é um campo de pesquisa que há muito tempo atrai o interesse dos pesquisadores. Até o início deste século, os principais trabalhos realizados neste campo eram relacionados com o escoamento potencial dos fluidos.

Em 1904, Ludwig Prandtl lançou suas idéias sobre as equações aplicáveis a uma região do escoamento, fina e próxima da parede, que sofre grande influência da característica viscosa do fluido e das características do escoamento. Para esta região junto a parede, a partir de uma borda de ataque, ocorre no início do escoamento uma estrutura laminar onde a característica viscosa do fluido tem grande influência.

Com o prosseguimento do escoamento, principia uma desestabilização da estrutura laminar inicial, que, passando por uma fase de transição, atinge, após percorrer uma distância ao longo da parede, uma estrutura turbulenta, onde as características do escoamento tem maior influência sobre o comportamento de suas variáveis. Esta fase de estrutura turbulenta no escoamento é nossa região de interesse.

As equações aplicáveis ao escoamento de fluidos são não lineares por isso seu estudo é complexo.

O escoamento de fluidos com estrutura laminar foi, e continua sendo, bastante estudado e é possível encontrarem-se métodos de solução exata para vários tipos de tal escoamento.

Com o melhor conhecimento da região laminar de um escoamento, a pesquisa foi voltada para a região turbulenta desta camada fina e próxima da parede, que passou a ser chamada camada limite na região turbulenta do escoamento ou somente camada limite turbulenta. O caráter aleatório do comportamento das variáveis do problema e a não linearidade das equações aplicáveis, tem dificultado a obtenção da solução do problema nesta região.

O caráter aleatório do comportamento das variáveis faz com que estas sejam expressas, segundo Hinze (8), em termos estatísticos, isto é, por um valor médio e uma flutuação que, pela não linearidade das equações, implicará em termos de produtos de flutuações, o que torna mais complexa a solução do problema.

Além destes termos adicionais, podem se obter equações de produtos de flutuações, tais como a Energia Cinética Turbulenta, nome dado ao produto $\overline{u'_\lambda u'_\lambda}$ e a Taxa de Dissipação da Energia Cinética, que será a partir de agora chamada de Taxa de Dissipação, nome dado ao produto $\overline{u'_{\lambda,j} u'_{\lambda,j}}$, as quais são acopladas às equações da Conservação da Massa e Quantidade de Movimento.

Para os termos obtidos de produtos de flutuações, tais como os produtos de flutuações de velocidade, velocidade e temperatura, velocidade e energia cinética turbulenta, velocidade e taxa de dissipação, $\overline{u'_\lambda u'_j}$, $\overline{u'_\lambda T'}$, $\overline{u'_\lambda q'}$ e $\overline{u'_\lambda \rho'}$, respectivamente, são usados modelos matemáticos que permitam expressá-los em função dos valores médios das variáveis do problema.

Esta modelagem se faz necessária para tornar igual o número de equações e de incógnitas no sistema usado para resolver o problema do escoamento turbulento.

Esta modelagem teve início segundo Hinze (8) com Boussinesq que relacionou o produto de flutuações de velocidades, $\overline{\rho u'_x u'_y}$, conhecido como tensor de Reynolds, com a velocidade média do escoamento, \bar{u}_x . A ele, Prandtl, com a teoria do Comprimento de Mistura e Von Kármán, com a Similaridade, se juntaram, relacionando a tensão tangencial devida à flutuação de velocidade com a velocidade média e seu gradiente na direção perpendicular à parede.

Para se obter a influência da turbulência do escoamento na difusão térmica turbulenta, Kays (10) usa uma relação entre características do escoamento, que são os números de Prandtl e de Peclet, e obtém o Número de Prandtl Turbulento.

O número de Prandtl turbulento é usado para relacionar o coeficiente de difusão térmica turbulenta com a viscosidade turbulenta no escoamento.

O produto de flutuações de velocidade e temperatura, $\overline{u'_x T'}$, é modelado em função do gradiente da temperatura média, \bar{T} , em cada seção do escoamento, com o auxílio do coeficiente de difusão térmica turbulenta.

Com o modelo completo, em termos de valores médios das variáveis, pode se obter um número de equações que permita a solução do problema proposto.

A não linearidade das equações do escoamento tem dificultado sua solução. Com o advento do computador, que possibilitou a expansão de métodos numéricos a solução de sistemas de equações matemáticas através de algoritmos passou a ter marcada influência na solução do escoamento turbulento.

Spalding (23), Patankar (17), Launder (12), Pereira Filho (18), entre outros, desenvolveram modelos numéricos para a solução do escoamento turbulento, modelos estes usados largamente por outros pesquisadores.

O "Congresso Internacional de Computação da Camada Limite Turbulenta", realizado em 1968, em Stanford (25), marcou o início da regularização de métodos de soluções com o uso de computadores das equações da camada limite turbulenta. Este Congresso classificou os métodos numéricos de acordo com a forma das equações que governam o fenômeno físico.

a) Método Integral - Constituído por um sistema de equações diferenciais ordinárias, deduzidas a partir da integração das equações fundamentais, na forma diferencial, na camada limite. Este método é descrito em maiores detalhes por Schlichting (21).

b) Método Diferencial - Constituído por um sistema de equações diferenciais parciais aplicadas na camada limite, que é usado no presente trabalho.

Há vários trabalhos publicados no estudo do escoamento turbulento. Cebeci e Smith (4), trabalharam com as equações da conservação da massa e quantidade de movimento, usando um modelo matemático em função da velocidade média para o produto de flutuações de velocidade. Jones e Launder (9) usaram as equações da conservação da massa, quantidade de movimento e a equação da energia cinética turbulenta.

Pereira Filho (18) usou as equações da conservação da massa, quantidade de movimento, energia cinética turbulenta e a

equação da taxa de dissipação, completando o sistema, propôs modelos matemáticos para os produtos de flutuações surgidos no problema e desenvolveu um algoritmo numérico para sua solução.

Seguindo a linha de pesquisa iniciada por Pereira Filho, este trabalho dá prosseguimento aos estudos realizados por Dutra (5), Ferreira (6), Lima (13) e Nicolau (15).

Dutra (5) resolveu um sistema com as equações da conservação da massa e quantidade de movimento, usando para o produto de flutuações de velocidades, $\overline{u'_i u'_j}$, um modelo proposto por Van-Driest, aplicado na camada limite turbulenta para uma superfície curva.

Ferreira (6) resolveu um sistema com as equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia cinética turbulenta, com a hipótese de Van-Driest para o tensor de Reynolds, aplicado a uma superfície curva.

Lima (13) resolveu um sistema com as equações da conservação da massa, quantidade de movimento e do balanço térmico na camada limite turbulenta, usando a hipótese de Van-Driest para o tensor de Reynolds e a hipótese de Rotta (20) para o produto das flutuações de velocidade e temperatura, $\overline{u'_i T'}$, aplicado a uma superfície curva.

Nicolau (15) resolveu um sistema com as equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia cinética turbulenta, para um escoamento plenamente desenvolvido, no interior de tubos, usando para o tensor de Reynolds um modelo proposto por Beckwith e Bushnell (2).

Dando continuidade a esta série de trabalhos, busca-se a

solução do problema da camada limite térmica turbulenta com gradiente de pressão variável, aplicando-se ao escoamento as equações da conservação da massa, quantidade de movimento, energia cinética turbulenta, taxa de dissipação, a equação da energia e os modelos matemáticos dos produtos de flutuações, modelados em função dos valores médios das variáveis do problema.

O modelo composto por estas equações é usado por vários pesquisadores, na solução de diversos tipos de escoamento. Nitsche et al. (16), em seu trabalho, realizado experimental e numericamente, busca a solução do problema sobre uma placa plana, com temperatura constante na parede. Schlichting (22), apresenta um trabalho com as equações do modelo usado no presente trabalho, com gradiente de pressão e fluxo de calor constantes. Yeroshenko et al. (30) resolveu o modelo proposto para um escoamento em tubos, com sucção na parede. Roganov et al. (19) resolveu o modelo proposto para um escoamento com gradiente de pressão adverso, em superfície permeável. O presente trabalho visa o cálculo da camada limite térmica turbulenta numa superfície, com um escoamento sujeito a gradiente de pressão adverso, favorável ou nulo, com temperatura constante ou com fluxo de calor constante na superfície.

Para a solução do sistema, os produtos de flutuações são modelados matematicamente através da análise do seu significado físico.

O produto $\overline{u'_i u'_j}$ é modelado matematicamente como uma função das velocidades médias \bar{u}_i e \bar{u}_j . Essa relação baseia-se no fato de que $\overline{\rho u'_i u'_j}$ tem dimensões físicas compatíveis com a quantidade de movimento. A variação de $\overline{\rho u'_i u'_j}$ implicará numa força,

isto leva à noção de tensão turbulenta.

Esta tensão turbulenta, chamada tensão de Reynolds, por analogia com a tensão viscosa, é tradicionalmente relacionada ao gradiente da velocidade média. O fator de proporcionalidade entre o gradiente de velocidade média e a tensão turbulenta é uma função local, dependente do tipo do escoamento e do número de Reynolds e normalmente conhecida como viscosidade turbulenta.

Como é possível determinar experimentalmente o comportamento da viscosidade turbulenta, da energia cinética turbulenta e da taxa de dissipação, verifica-se que existe uma relação entre as formas como variam estas funções, o que sugere o seu interrelacionamento na obtenção da viscosidade turbulenta.

O produto das flutuações de velocidade e temperatura, $\overline{u'_j T'}$, representa o transporte de energia térmica pela turbulência do escoamento. Este transporte é, fisicamente, análogo à convecção térmica. Isto leva a se relacionar o produto $\overline{u'_j T'}$ ao gradiente da temperatura média do escoamento turbulento, através de um coeficiente, função das características do escoamento, conhecido como coeficiente de difusão térmica turbulenta.

Os produtos de flutuações $\overline{u'_j q'}$, $\overline{u'_j \phi'}$ e $\overline{u'_j \mathcal{D}'}$, onde ϕ' é a flutuação de pressão no escoamento, tem seus modelos propostos por Pereira Filho (18).

Com as equações, os modelos dos produtos de flutuações e os modelos da viscosidade turbulenta e da difusão térmica turbulenta, obtém-se um sistema com mesmo número de equações e incógnitas, não linear e acoplado.

Para solucionar este sistema, suas equações foram discretizadas em diferenças finitas, obtendo-se equações algébricas não lineares. Para se resolver este sistema, as equações foram linearizadas e um algoritmo numérico desenvolvido.

As condições de contorno, bem como as equações, levam a um problema parabólico. Para se obter a solução deste tipo de problema, ou seja, de valor inicial, é necessário especificar-se a distribuição inicial das incógnitas. A partir destes valores iniciais são calculadas, sucessivamente, novas distribuições até que, ou se obtenha o valor final desejado ou a solução desestabilise numericamente.

Como solução do problema, obtêm-se os perfis de velocidade, temperatura, energia cinética turbulenta e taxa de dissipação, o comportamento da viscosidade turbulenta e do coeficiente de difusão térmica turbulenta.

Estas variáveis obtidas podem ser agrupadas de forma a se ter alguns parâmetros auxiliares que permitam definir melhor o escoamento, tais como, tensão na parede, números de Reynolds, de Prandtl turbulento, de Nusselt, de Stanton, Fator de forma, fluxo de calor na parede, e coeficiente de fricção.

C A P Í T U L O 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1. PROBLEMA PROPOSTO

O problema proposto é a determinação da solução do problema da convecção forçada turbulenta sobre uma superfície num escoamento com gradiente de pressão variável.

Para o desenvolvimento das equações do problema proposto, adotou-se primeiramente, uma placa plana com a configuração dada na Figura 1 e as hipóteses de escoamento incompressível, permanente, newtoniano e não isotérmico.

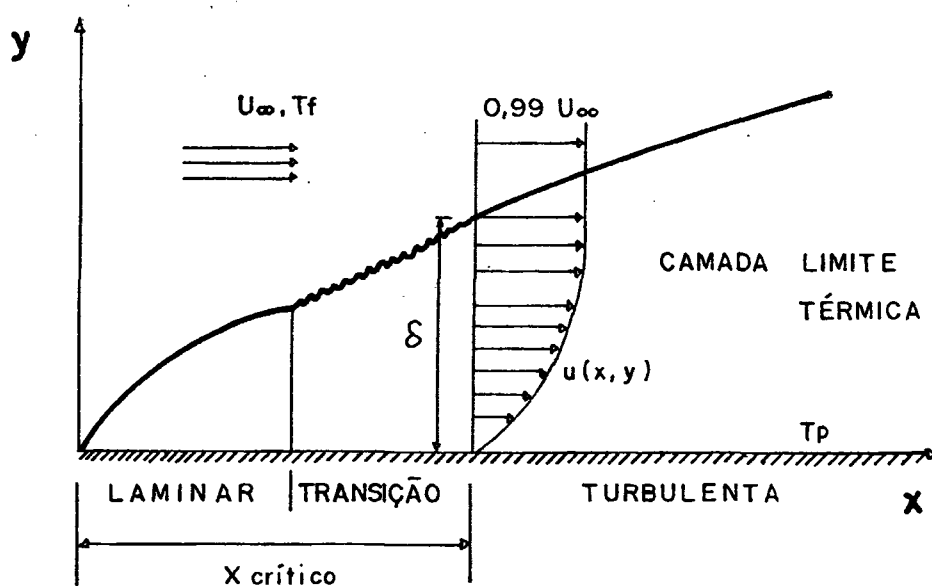


FIGURA 1 - Configuração do Problema.

O objetivo do trabalho se concentra na obtenção dos perfis de velocidade e temperatura médias e nos perfis de energia cinética turbulenta e da taxa de dissipação da energia cinética turbulenta na camada limite turbulenta do escoamento.

2.2. EQUAÇÕES GERAIS

Para a solução do problema proposto, torna-se necessária a aplicação de equações de conservação que permitam a análise das variáveis velocidade média, energia cinética turbulenta, taxa de dissipação e temperatura média, para cada seção do escoamento, ao percorrer-se o eixo x , dado na Figura 1.

As equações de conservação que permitem tal análise são,

- equação de conservação da massa
- equação de conservação da quantidade de movimento
- equação da energia cinética turbulenta
- equação da taxa de dissipação da energia cinética turbulenta
- equação da energia.

2.2.1. EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA

Para a aplicação das equações ao problema, é necessária a análise de suas várias formas. Assim, a equação da conservação da massa para um escoamento instantâneo incompressível se escreve como segue,

$$u_{i,i} = 0 \quad (2.1)$$

Para o escoamento turbulento, devido ao seu caráter aleatório, a velocidade, segundo Hinze (8) é composta de um valor médio \bar{u}_i e de uma flutuação u'_i , conforme Figura 2, de modo que a equação (2.1) passa a ser expressa por

$$(\bar{u}_i + u'_i)_{,i} = 0 \quad (2.2)$$

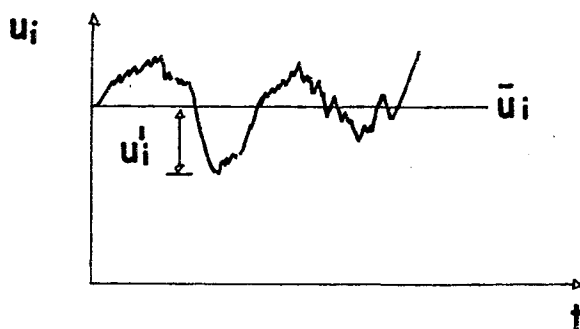


FIGURA 2 - Representação da Velocidade no Escoamento Turbulento.

Na média do escoamento turbulento, tem-se

$$\overline{\delta_i + \delta'_i} = \bar{\delta}_i + \bar{\delta'_i} \quad (2.3)$$

onde

$$\bar{\delta'_i} = 0 \quad (2.4)$$

e a equação para a média do escoamento turbulento será expressa pela média da equação (2.2),

$$\overline{(\bar{u}_i + u'_i)_{,i}} = 0$$

que leva a

$$\bar{u}_{i,i} = 0 \quad (2.5)$$

Assim, para a flutuação de velocidade do escoamento turbulento, a equação de conservação da massa é obtida associando-se as equações (2.5) e (2.2) tal que,

$$u'_{i,i} = 0 \quad (2.6)$$

2.2.2. EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Para um escoamento incompressível, newtoniano, permanente, instantâneo, segundo White (28), a equação de conservação da quantidade de movimento toma a seguinte forma,

$$\rho u_j u_{i,j} = -p_{,i} + (\mu u_{i,j}),_j + b_i \quad (2.7)$$

Para um escoamento turbulento, devido ao caráter aleatório das variáveis, que são expressas pela soma de um valor médio e de uma flutuação, as variáveis velocidade e pressão que compõem a equação (2.7) terão a seguinte forma,

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (2.8)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (2.9)$$

Introduzindo as equações (2.9) e (2.8) na equação (2.7) e desconsiderando as forças de campo b_i , obtém-se a equação de conservação da quantidade de movimento para um escoamento turbulento,

$$\rho (\bar{u}_j + u'_j) (\bar{u}_i + u'_i)_{,j} = -(\bar{p} + p')_{,i} + [\mu (\bar{u}_i + u'_i)_{,j}]_{,j} \quad (2.10)$$

Ao se dividir esta equação pela massa específica do fluido ρ , obtêm-se

$$(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_i + u'_i)_{,j} = -(\bar{\phi} + \phi')_{,i} + \left[v(\bar{u}_i + u'_i)_{,j} \right]_{,j} \quad (2.11)$$

onde

$$\bar{\phi} + \phi' = \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{p'}{\rho} \quad (2.12)$$

e

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.13)$$

Na média do escoamento turbulento, conforme as equações (2.3) e (2.4), a equação de conservação da quantidade de movimento, que é a média da equação (2.11) será,

$$\overline{(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_i + u'_i)_{,j}} = -\bar{\phi}_{,i} + \left[\overline{v(\bar{u}_i + u'_i)_{,j}} \right]_{,j} \quad (2.14)$$

Nesta expressão, segundo Hinze (8), o termo à esquerda da igualdade pode ser expresso na forma,

$$\overline{(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_i + u'_i)_{,j}} = \overline{\bar{u}_j \bar{u}_{i,j}} + \overline{u'_j u'_{i,j}} \quad (2.15)$$

Pelo desenvolvimento de uma derivada na notação tensorial,

$$\overline{(u'_j u'_i)_{,j}} = \overline{u'_j u'_{i,j}} + \overline{u'_{i,j} u'_j} \quad (2.16)$$

e, pela aplicação da equação (2.6) nesta derivada, obtêm-se,

$$\overline{u'_j u'_{i,j}} = \overline{(u'_j u'_i)_{,j}} \quad (2.17)$$

que é a média da derivada do produto de flutuações de velocidade.

de $\rho u'_j u'_i$ o tensor de Reynolds.

Introduzindo a equação (2.17) na equação (2.15), seu resultado na equação (2.14) e usando a equação (2.4), obtém-se a equação de conservação da quantidade de movimento para a média do escoamento turbulento,

$$\overline{u_j u_i},_j = -\overline{\phi},_i + (\nu \overline{u_i},_j - \overline{u'_j u'_i}),_j \quad (2.18)$$

Para a flutuação do escoamento turbulento, a equação de conservação da quantidade de movimento é obtida pela diferença entre as equações para o escoamento turbulento (2.11) e o escoamento médio (2.18), ou seja,

$$(\overline{u_j} + u'_j)(\overline{u_i} + u'_i),_j - \overline{u_j u_i},_j = -\phi',_i + [\nu(u'_i),_j],_j - \overline{(u'_j u'_i)},_j \quad (2.19).$$

Nesta equação, o primeiro termo à esquerda da igualdade pode ser desenvolvido em,

$$(\overline{u_j} + u'_j)(\overline{u_i} + u'_i),_j = \overline{u_j u_i},_j + \overline{u_j} u'_{i,j} + u'_j \overline{u_i},_j + u'_j u'_{i,j} \quad (2.20)$$

e, pelo desenvolvimento da derivada $(u'_j u'_i),_j$ e a aplicação da equação (2.6)

$$u'_j u'_{i,j} = (u'_j u'_i),_j \quad (2.21)$$

Introduzindo a equação (2.21) na equação (2.20) e seu resultado na equação (2.19), obtém-se a equação de conservação da quantidade de movimento para a flutuação do escoamento turbulento,

$$\bar{u}_j u'_{i,j} + u'_j \bar{u}_{i,j} + u'_j u'_{i,j} = -\phi'_{i,j} + \left[v(u'_{i,j}) - \overline{u'_j u'_i} \right]_{,j} \quad (2.22)$$

2.2.3. EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Ao se analisar a equação (2.22), observa-se a presença do produto de flutuações de velocidade, $u'_j u'_i$. Este termo é estudado multiplicando-se esta equação pela flutuação de velocidade u'_k e obtendo-se a média da equação assim gerada, ou seja,

$$\bar{u}_j \overline{u'_i u'_k} = -\overline{\phi'_{i,j} u'_k} + \overline{(v u'_{i,j})_{,j} u'_k} - 2 \overline{u'_j u'_{i,j} u'_k} - \overline{u'_j \bar{u}_{i,j} u'_k} \quad (2.23)$$

Ao se somar a equação (2.23) com ela própria após sofrer uma rotação de índices, se obtém,

$$\begin{aligned} \bar{u}_j (\overline{u'_k u'_i}_{,j} + \overline{u'_i u'_k}_{,j}) &= -\overline{\phi'_{i,j} u'_k} - \overline{\phi'_{k,j} u'_i} + \overline{(v u'_{i,j})_{,j} u'_k} + \\ &+ \overline{(v u'_{k,j})_{,j} u'_i} - 2 \overline{u'_j (u'_k u'_{i,j} + u'_i u'_{k,j})} - \overline{u'_j u'_k \bar{u}_{i,j}} - \overline{u'_j u'_i \bar{u}_{k,j}} \quad (2.24) \end{aligned}$$

A análise da derivada do produto de flutuações de velocidade, $u'_i u'_k$, em relação a j , origina,

$$(u'_i u'_k)_{,j} = u'_i u'_{k,j} + u'_{i,j} u'_k \quad (2.25)$$

e, o triplo produto de flutuações de velocidade, $(u'_j u'_i u'_k)$, derivado em relação a j , usando a equação (2.6), origina,

$$(u'_j u'_i u'_k)_{,j} = u'_j (u'_i u'_{k,j} + u'_{k,j} u'_i) \quad (2.26)$$

Introduzindo as equações (2.26) e (2.25) na equação (2.24) se obtêm,

$$u_j(u'_i u'_k)_{,j} = -\phi'_{i,k} u'_k - \phi'_{k,i} u'_i + (v u'_{i,j})_{,j} u'_k + (v u'_{k,j})_{,j} u'_i - 2(u'_j u'_i u'_k)_{,j} - (u'_j u'_k) u'_{i,j} - (u'_j u'_i) u'_{k,j} \quad (2.27)$$

Esta equação é geralmente chamada de equação de transporte do tensor de Reynolds $(\overline{u'_i u'_j})$.

Através uma contração de índices na equação (2.27), k contraído por i , obtêm-se uma equação para o produto de flutuações de velocidade $(u'_i u'_i)$, traço do tensor de Reynolds, $\rho(\overline{u'_i u'_i})$,

$$\bar{u}_j(\overline{u'_i u'_i})_{,j} = -2(\overline{u'_j u'_i}) \bar{u}_{i,j} - 2\overline{u'_i \phi'_{i,i}} - 2(\overline{u'_j u'_i u'_i})_{,j} + 2\overline{u'_i (v u'_{i,j})}_{,j} \quad (2.28)$$

A metade do produto $(u'_i u'_i)$ é conhecido como energia cinética turbulenta, e será representado por,

$$q' = \frac{1}{2} (u'_i u'_i) \quad (2.29)$$

$$\bar{q} \equiv \bar{q}' = \frac{1}{2} (\overline{u'_i u'_i}) \quad (2.30)$$

A equação (2.30) representa a média da energia cinética turbulenta do escoamento.

O triplo produto de flutuações $(\overline{u'_j u'_i u'_i})_{,j}$, com o uso da equação (2.29), será expresso por,

$$(\overline{u'_j (u'_i u'_i)})_{,j} = 2(\overline{u'_j q'})_{,j} \quad (2.31)$$

Introduzindo a equação (2.31) e as representações q' e \bar{q} na equação (2.28), obtém-se a equação da energia cinética turbulenta,

$$\bar{u}_j \bar{q}_{,j} = -(\overline{u'_j u'_j}) \bar{u}_{j,j} - (2\overline{u'_j q'} + \overline{u'_j \phi'}),_j + \overline{u'_j (v u'_{j,j})},_j \quad (2.32)$$

Na equação (2.32), pode se trabalhar sobre o último termo, onde, considerando-se a viscosidade cinemática v constante, obtém-se, a partir da derivada segunda do produto de flutuações de velocidade, $(u'_j u'_j)$,

$$v(\overline{u'_j u'_j}),_{jj} = v(\overline{u'_{j,j} u'_j} + \overline{u'_j u'_{j,j}}),_j$$

$$v(\overline{u'_j u'_j}),_{jj} = 2v(\overline{u'_{j,j} u'_{j,j}}) + 2v\overline{u'_{j,j} u'_{j,j}}$$

que, isolando o último termo a direita da igualdade e usando a equação (2.30) conduz a,

$$v\overline{u'_{j,j} u'_{j,j}} = v\bar{q}_{,jj} - v(\overline{u'_{j,j} u'_{j,j}}) \quad (2.33)$$

O terceiro termo da equação (2.33), produto das derivadas das flutuações de velocidade, é um termo de dissipação viscosa da energia cinética do escoamento e será representado por,

$$\mathcal{D}' = \frac{1}{2} (\overline{u'_{j,j} u'_{j,j}}) \quad (2.34)$$

$$\bar{\mathcal{D}} \equiv \bar{\mathcal{D}}' = \frac{1}{2} (\overline{u'_{j,j} u'_{j,j}}) \quad (2.35)$$

Introduzindo a equação (2.35) na equação (2.33) e seu resultado na equação (2.32), obtém-se,

$$\bar{u}_j \bar{q}_{,j} = -(\overline{u'_j u'_i}) \bar{u}_{i,j} - (\overline{2u'_j q'} + \overline{u'_j \phi'}),_j + \bar{v} \bar{q}_{,jj} - 2\bar{\nu} \bar{\nabla}^2 \quad (2.36)$$

Esta é a forma da equação da energia cinética turbulenta a ser utilizada no presente trabalho.

2.2.4. EQUAÇÃO DA TAXA DE DISSIPACÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Uma equação para o produto das derivadas das flutuações de velocidade dado pela equação (2.35), é obtida a partir da equação de conservação da quantidade de movimento da flutuação do escoamento, ao diferenciar a equação (2.22) em relação a coordenada x_k , isto é,

$$\begin{aligned} & \bar{u}_{j,k} u'_{i,j} + u'_{j,k} \bar{u}_{i,j} + u'_{j,k} u'_{i,j} + \bar{u}_j u'_{i,jk} + u'_{j,k} \bar{u}_{i,jk} \\ & + u'_{j,k} u'_{i,jk} = -\phi'_{,ik} + (\nu u'_{i,j} - \overline{u'_j u'_i}),_{jk} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Multiplicando-se a equação (2.37) pela derivada da flutuação de velocidade $u'_{i,k}$ e fazendo-se a média deste produto, surge,

$$\begin{aligned} & \bar{u}_{j,k} \overline{u'_{i,j} u'_{i,k}} + \bar{u}_{i,j} \overline{u'_{j,k} u'_{i,k}} + \overline{u'_{j,k} u'_{i,j} u'_{i,k}} + \bar{u}_j \overline{u'_{i,jk} u'_{i,k}} + \\ & \overline{u'_j \bar{u}_{i,jk} u'_{i,k}} + \overline{u'_{j,k} u'_{i,jk} u'_{i,k}} = -\overline{\phi'_{,ik} u'_{i,k}} + (\nu \overline{u'_{i,j} u'_{i,k}} - \overline{u'_j u'_i}),_{jk} u'_{i,k} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Partindo-se da derivada do produto das derivadas na flutuação de velocidade, obtêm-se,

$$\overline{(u'_{i,k} u'_{i,k})}_{,j} = 2 \overline{u'_{i,jk} u'_{i,k}} \quad (2.39)$$

Usando-se a equação (2.39), o quarto termo do lado esquerdo da igualdade, conforme a representação dada pela equação (2.35), passa a ser expresso por,

$$\bar{u}_j \overline{u'_{i,jk} u'_{i,k}} = \bar{u}_j \bar{D}_{,j} \quad (2.40)$$

da mesma forma, o sexto termo, usando a equação (2.34), será expresso por,

$$\overline{u'_j u'_{i,jk} u'_{i,k}} = \overline{u'_j D'_{,j}} \quad (2.41)$$

A análise do último termo a esquerda da igualdade, considerando-se a viscosidade cinemática ν constante, origina,

$$\overline{(\nu u'_{i,j} - \bar{u}'_j u'_{i,j})}_{,j} u'_{i,k} = \overline{\nu u'_{i,jjk} u'_{i,k}} - \overline{u'_j u'_{i,jk} u'_{i,k}} \quad (2.42)$$

A análise dos termos da equação (2.42) mostra que o último termo a direita da equação é descrito na equação (2.41), enquanto o outro termo a direita da igualdade pode, a partir da derivada segunda do produto das derivadas das flutuações de velocidade, ser expresso por,

$$(u'_{i,k} u'_{i,k})_{,jj} = 2(u'_{i,k} u'_{i,kj})_{,j}$$

$$(u'_{i,k} u'_{i,k})_{,jj} = 2u'_{i,k} u'_{i,kjj} + 2u'_{i,kj} u'_{i,kj} \quad (2.43)$$

tal que

$$\overline{v u'_{i,jj} k u'_{i,k}} = \frac{1}{2} v (\overline{u'_{i,k} u'_{i,k}})_{,jj} - v (\overline{u'_{i,kj} u'_{i,kj}}) \quad (2.44)$$

Introduzindo na equação (2.44) a representação dada na equação (2.35), o seu resultado na equação (2.42) e, a equação daí obtida, com as equações (2.41) e (2.40), substituídas na equação (2.38), obtém-se a equação da taxa de dissipação do escoamento turbulento,

$$\begin{aligned} \overline{u_j \overline{D}}_{,j} &= -\overline{\phi'_{ik} u'_{i,k}} - \overline{u'_{i,k} u'_{j,k} u'_{i,j}} - 2\overline{u'_j \overline{D}}_{,j} - \overline{u}_{i,j} (\overline{u'_{i,k} u'_{j,k}}) - \\ &\overline{u}_{j,k} (\overline{u'_{i,k} u'_{i,j}}) - \overline{u}_{i,jk} (\overline{u'_j u'_{i,k}}) + v \overline{D}_{,jj} - v (\overline{u'_{i,kj} u'_{i,kj}}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.2.5. EQUAÇÃO DA ENERGIA

Para se fazer o balanço do fluxo de energia na forma de calor na camada limite térmica turbulenta, para um escoamento instantâneo, onde o fluxo de energia é devido à diferença de nível de energia térmica, isto é, temperatura, entre a parede e o fluido em escoamento usa-se, segundo White (28), a seguinte expressão.

$$\rho u_j h_{e,j} - (kT, j)_{,j} - 2\mu (u_{i,j} u_{i,j} + u_{i,j} u_{j,i}) = 0 \quad (2.46)$$

Para um escoamento incompressível, a entalpia é expressa em função da temperatura, segundo Van Wylen (26) como sendo,

$$dh_e = Cp dT \quad (2.47)$$

A introdução da equação (2.47) e a assunção para o escoamento turbulento de que temperatura e velocidade sejam de caráter aleatório, que implica na presença de um valor médio e de uma flutuação destas variáveis, ou seja, $T = \bar{T} + T'$ e $u_i = \bar{u}_i + u'_i$, torna a equação (2.46) na seguinte expressão,

$$\begin{aligned} (\bar{u}_i + u'_i)(\bar{T} + T')_{,j} = & \left[\frac{k}{\rho Cp} (\bar{T} + T')_{,j} \right]_{,j} + \frac{2\mu}{\rho Cp} \left[(\bar{u}_i + u'_i)_{,j} \right. \\ & \left. (\bar{u}_i + u'_i)_{,j} + (\bar{u}_i + u'_i)_{,j} (\bar{u}_j + u'_j)_{,i} \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

A equação do balanço térmico para o escoamento turbulento médio, que é a média da equação (2.48), é a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \bar{u}_j \bar{T}_{,j} = & -\overline{u'_j T'}_{,j} + \left[\frac{k}{\rho Cp} \bar{T}_{,j} \right]_{,j} + \frac{2\mu}{\rho Cp} \left[\bar{u}_{i,j} \bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j} \bar{u}_{j,i} \right] + \\ & \frac{2\mu}{\rho Cp} \left[\overline{u'_{i,j} u'_{i,j}} + \overline{u'_{i,j} u'_{j,i}} \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

Na análise dos termos da equação (2.49), partindo-se da derivada segunda do tensor de Reynolds, se obtém,

$$(\overline{u'_i u'_j}),_{ji} = (\overline{u'_{i,j} u'_j} + \overline{u'_i u'_{j,j}}),_i$$

$$(\overline{u'_i u'_j}),_{ji} = \overline{u'_{i,j} u'_j} + \overline{u'_{i,j} u'_{j,i}} + (\overline{u'_i u'_{j,j}}),_i \quad (2.50)$$

Nesta expressão, a inversão da ordem de derivação no primeiro termo à direita da igualdade e o uso da equação (2.6) anulam o primeiro e o terceiro termo à direita, tal que,

$$\overline{u'_{i,j} u'_j},_i = (\overline{u'_i u'_j}),_{ji} \quad (2.51)$$

Também, na derivada do produto de flutuações de velocidade e temperatura, se obtém,

$$(\overline{u'_j T'}),_j = \overline{u'_j T'},_j \quad (2.52)$$

Introduzindo-se as equações (2.51) e (2.52) e a representação dada na equação (2.35) na equação (2.49), se obtém a equação do comportamento térmico do escoamento turbulento,

$$\begin{aligned} \bar{u}_j \bar{T},_j &= -(\overline{u'_j T'}),_j + \left[\frac{k}{\rho C_p} \bar{T},_j \right],_j + \frac{2\mu}{\rho C_p} \left[\bar{u}_{i,j} \bar{u}_{i,j} + \right. \\ &\left. \bar{u}_{i,j} \bar{u}_{j,i} \right] + \frac{2\mu}{\rho C_p} \left[2\bar{D} + (\overline{u'_i u'_j}),_{ji} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

2.3. SISTEMA DE EQUAÇÕES

Neste ponto, tem-se um sistema de equações diferenciais, que permitem o balanço de massa, energia e quantidade de movi-

mento, num escoamento turbulento, composto das seguintes equações,

$$\bar{u}_{i,i} = 0 \quad (2.54)$$

$$\bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -\bar{\phi}_{,i} + (v \bar{u}_{i,j} - \overline{u'_j u'_i}),_j \quad (2.55)$$

$$\bar{u}_j \bar{q}_{,j} = -(\overline{u'_i u'_j}) \bar{u}_{i,j} - (\overline{u'_j q'} + \overline{u'_j \phi'}),_j +$$

$$v \bar{q}_{,jj} - 2v \bar{D} \quad (2.56)$$

$$\bar{u}_j \bar{D}_{,j} = -\overline{\phi'_{,ik} u'_{i,k}} - \overline{u'_{i,k} u'_{j,k} u'_{i,j}} - \overline{u'_j D'_{,j}} -$$

$$\bar{u}_{i,j} (\overline{u'_{i,k} u'_{j,k}}) - \bar{u}_{j,k} (\overline{u'_{i,k} u'_{i,j}}) - \bar{u}_{i,jk} (\overline{u'_j u'_{i,k}}) +$$

$$v \bar{D}_{,jj} - v (\overline{u'_{i,kj} u'_{i,kj}}) \quad (2.57)$$

$$\bar{u}_j \bar{T}_{,j} = -(\overline{u'_j T'})_{,j} + \left[\frac{k}{\rho C_p} \bar{T}_{,j} \right]_{,j} + \frac{2\mu}{\rho C_p} \left[\bar{u}_{i,j} \bar{u}_{i,j} + \right.$$

$$\left. \bar{u}_{i,j} \bar{u}_{j,i} \right] + \frac{2\mu}{\rho C_p} \left[2\bar{D} + (\overline{u'_i u'_j})_{,ji} \right] \quad (2.58)$$

Para que o sistema de equações diferenciais não linear, tenha solução é necessário que o número de equações e incógnitas no sistema sejam iguais.

Na análise do sistema, tem-se as variáveis médias velocidade \bar{u}_i , temperatura \bar{T} , energia cinética turbulenta \bar{q} , taxa de dissipação \bar{D} , os momentos de ordem superior, $\overline{\rho u'_i u'_j}$, tensor de Reynolds ou transporte de quantidade de movimento, $\rho C_p \overline{u'_j T'}$, fluxo

de calor turbulento, $\overline{u'_j q'}$, transporte de energia cinética turbulenta, $\overline{u'_j \rho'}$, transporte da taxa de dissipação, devidos à flutuação de velocidade, além do triplo produto de flutuações, $\overline{u'_{i,k} u'_{j,k} u'_{i,j}}$ do termo de pressão média $\bar{\phi}$ e o transporte das flutuações de pressão $\overline{u'_j \phi'}$ como incógnitas do sistema.

Assim, o número de incógnitas é maior que o número de equações disponíveis no sistema.

Para se obter o número de incógnitas igual ao número de equações, expressam-se os momentos como funções das variáveis médias do escoamento.

A obtenção destas expressões está realizada na seção seguinte.

2.4. CONDIÇÕES DE FECHAMENTO

Chama-se de condições de fechamento ao conjunto de relações usadas para expressar os momentos em função das variáveis médias do escoamento.

Baseado em Spalding e Ng (24) e Harlow e Nakayama (7) a condição de fechamento do tensor de Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$, é dada pela seguinte expressão,

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \bar{q} \delta_{ij} - \epsilon m \bar{e}_{ij} \quad (2.59)$$

$$\bar{e}_{ij} = 0.5 (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (2.60)$$

Na equação (2.59) a variável ϵm é o coeficiente de transporte turbulento da quantidade de movimento, conhecida por viscosidade turbulenta, e \bar{e}_{ij} , conforme a equação (2.60), a taxa de deformação no fluido em escoamento. Os termos da diagonal, $\overline{u'_i u'_i}$, representam a energia cinética turbulenta do escoamento.

Na equação (2.56) o termo $(\overline{u'_j q'} + \overline{u'_j \phi'})$ será expresso em função de variáveis médias, tal que, segundo Hinze (8), transporte de energia cinética turbulenta e transporte de energia realizado pela flutuação de pressão, devido a turbulência do escoamento, sejam,

$$\overline{u'_j q'} + \overline{u'_j \phi'} = -\theta_A \epsilon m \overline{u'_i e_{ij}} \quad (2.61)$$

onde

$$\overline{u'_i e_{ij}} = (0,5 \times ((\overline{u'_i + u'_i})_{,j} + (\overline{u'_j + u'_j})_{,i})) \overline{u'_i} \quad (2.62)$$

No apêndice B está desenvolvida uma expressão em termos de energia cinética para a equação (2.61), tal que

$$\overline{u'_j q'} + \overline{u'_j \phi'} = -\theta_A \epsilon m \bar{q}_{,j} \quad (2.63)$$

Na equação (2.57), Pereira Filho (18) propõe as seguintes expressões que envolvem produtos de flutuações, aproximadas por valores médios, nas formas,

$$\overline{u'_{i,k} u'_{j,k} u'_{i,j}} + \nu (\overline{u'_{i,k} u'_{i,k} u'_{j,k}}) = 2\nu C_2 (\bar{D})^2 / \bar{q} \quad (2.64)$$

$$\bar{u}_{i,j} (\overline{u'_{i,k} u'_{j,k}}) + \bar{u}_{j,k} (\overline{u'_{i,k} u'_{i,j}}) = -2C_1 (\bar{D}/\bar{q}) (\overline{u'_i u'_j}) \bar{u}_{i,j} \quad (2.65)$$

$$(\overline{u'_{i,k} \phi'_{i,k}} + \overline{u'_{i,k} \vartheta'_{i,k}})_{,i} = \left(\frac{C_3 \bar{q}}{\nu \bar{\vartheta}} (\overline{u'_i u'_i}) \bar{\vartheta}_{,j} \right)_{,j} \quad (2.66)$$

Na equação (2.64), o primeiro termo representa a taxa de geração de vorticidade através da ação da tensão cisalhante da própria turbulência e o segundo, a variação na taxa de dissipação pela ação da viscosidade. Na equação (2.65) tem-se representada a difusão da taxa de dissipação no escoamento e na equação (2.66), a geração de taxa de dissipação devida ao gradiente de pressão no escoamento e geração de taxa de dissipação pelo caráter turbulento do escoamento.

Estas expressões são propostas com base na analogia dimensional e física das equações, com as constantes tomando os seguintes valores, $C_1 = 1,45$, $C_2 = 2,00$ e $C_3 = 0,975$. Na equação (2.57), o termo $\bar{u}_{i,jk} (\overline{u'_j u'_{i,k}})$, após a análise da sua ordem de grandeza, devido ao seu pequeno valor perante aos demais termos da equação, pode ser desprezado.

Na equação (2.58), o produto das flutuações de velocidade e temperatura, é modelado por analogia com o tensor de Reynolds, em função do gradiente de temperatura média do escoamento pela expressão,

$$\overline{u'_j T'} = -\epsilon h \bar{T}_{,j} \quad (2.67)$$

onde ϵh é o coeficiente de difusão térmica turbulenta do escoamento.

Introduzindo-se as condições de fechamento no sistema de equações em estudo, obtém-se o seguinte sistema,

$$\bar{u}_{i,i} = 0 \quad (2.68)$$

$$\bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -\bar{\phi}_{,i} + (v \bar{u}_{i,j})_{,j} + \left[\epsilon m (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \right]_{,j} - 2\bar{q}_{,i} \quad (2.69)$$

$$\bar{u}_j \bar{q}_{,j} = \left[(v + \theta_A \epsilon m) \bar{q}_{,j} \right]_{,j} - 2v\bar{D} + \epsilon m (\bar{u}_{i,j} \bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i} \bar{u}_{i,j}) \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_j \bar{D}_{,j} = & 2C_1 \frac{\bar{D}}{\bar{q}} (\overline{u'_i u'_j}) \bar{u}_{i,j} - 2vC_2 \frac{\bar{D}^2}{\bar{q}} + v\bar{D}_{,kk} + \\ & \left[C_3 \frac{\bar{q}}{\bar{D}} (\overline{u'_i u'_i}) \bar{D}_{,j} \right]_{,j} \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_j \bar{T}_{,j} = & (\epsilon h \bar{T}_{,j})_{,j} + \left[\frac{k}{\rho C_p} \bar{T}_{,j} \right]_{,j} + \frac{2\mu}{\rho C_p} \left[\bar{u}_{i,j} \bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i} \bar{u}_{i,j} \right] + \\ & \frac{2\mu}{\rho C_p} \left[2\bar{D} + 2\bar{q}_{,jj} - \frac{1}{2} (\epsilon m \bar{u}_{i,j} + \epsilon m \bar{u}_{j,i})_{,ji} \right] \end{aligned} \quad (2.72)$$

A análise deste sistema mostra que todas as equações são funções de termos médios do escoamento. Para resolver este sistema, faz-se necessário conhecer uma relação que permita obter ϵm , viscosidade turbulenta, e ϵh , coeficiente de difusão térmica turbulenta, em função de parâmetros médios ou parâmetros já determinados no escoamento. Estas relações, ou modelos, serão analisados a seguir.

2.5. MODELO MATEMÁTICO PARA A VISCOSIDADE TURBULENTA E O COEFICIENTE DE DIFUSÃO TÉRMICA TURBULENTA

Para a solução do sistema dado no item anterior, é necessário se obter ϵm e ϵh em função de valores conhecidos ou pré-

determinados.

Hinze (8), com base na analogia dimensional, por semelhança com a viscosidade cinemática do fluido, modelou ϵ_m como segue,

$$\epsilon_m = v' \ell \quad (2.73)$$

Nesta equação, v' é uma flutuação de velocidade e ℓ é um comprimento determinado por características locais do escoamento. Utilizando-se a microescala de turbulência λ , e o número de Reynolds Re_λ , baseado nesta escala sendo,

$$Re_\lambda = \frac{v' \lambda}{\nu} \quad (2.74)$$

Hinze (8) relacionou ℓ com λ através de uma constante C , tal que,

$$\ell = C \lambda Re_\lambda \quad (2.75)$$

Introduzindo-se a equação (2.75) na equação (2.73) e utilizando ao invés de $(v')^2$, a energia cinética turbulenta \bar{q} , obtém-se,

$$\epsilon_m = \frac{C \bar{q} \lambda^2}{\nu} \quad (2.76)$$

Ainda segundo Hinze (8), para um escoamento turbulento, localmente isotrópico, ocorre a seguinte relação entre a taxa de dissipação e a energia cinética turbulenta,

$$\bar{D} = \frac{5\bar{q}}{\lambda^2} \quad . \quad (2.77)$$

Introduzindo a equação (2.77) em termos de λ na equação (2.76), obtêm-se

$$\epsilon_m = \frac{C_4 \bar{q}^2}{\nu \bar{D}}$$

A equação (2.78) é o modelo proposto para se relacionar ϵ_m , viscosidade turbulenta, com parâmetros médios do escoamento.

Para a região próxima da placa, determinada por $y^+ < 80$, onde a microescala λ tem seu significado alterado pela influência viscosa do fluido, Pereira Filho (18) propôs o uso da expressão,

$$\epsilon_m = \nu A' (y^+)^2 \quad (2.79)$$

Nesta expressão, A' tem valor 0,00925.

Para a região $y^+ > 80$, é proposta a expressão para C_4 na forma,

$$C_4 = ay^+ + b' \quad . \quad (2.80)$$

Com isto, a equação (2.78) para $y^+ > 80$ é expressa da seguinte forma,

$$\epsilon_m = (ay^+ + b') \frac{\bar{q}^2}{\nu \bar{D}} \quad . \quad (2.81)$$

Nesta expressão, a e b' são determinados tal que as equações (2.79) e (2.81) tenham um ponto de encontro contínuo quando $y^+ = 80$.

Portanto, o modelo proposto para a obtenção da viscosidade turbulenta ϵ_m é,

$$\epsilon_m = \nu A' (y^+)^2 \quad \text{para} \quad y^+ < 80 \quad (2.79)$$

e,

$$\epsilon_m = (ay^+ + b') \frac{\bar{q}^2}{\nu \bar{D}} \quad \text{para} \quad y^+ > 80 \quad (2.81)$$

Usando a relação dada por Rotta (20) e Kays (10) entre ϵ_h , difusão térmica turbulenta e ϵ_m , viscosidade turbulenta, se obtém ϵ_h como sendo,

$$\epsilon_h = \frac{\epsilon_m}{Pr_{t\epsilon}} \quad (2.82)$$

Nesta expressão, $Pr_{t\epsilon}$ é o número de Prandtl turbulento, que, segundo Kays (10) é obtido por,

$$Pr_{t\epsilon} = \frac{1}{\frac{1}{2Pr_{t\infty}} + CPe_t \sqrt{\frac{1}{Pr_{t\infty}} - (CPe_t)^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{CPe_t Pr_{t\infty}}\right) \right]}} \quad (2.83)$$

e, segundo Rotta (20), pela expressão,

$$Pr_{t\epsilon} = 0,95 - 0,45(y/\delta)^2 \quad (2.84)$$

Na equação (2.83), segundo Kays (10), $C=0,2$, $Pr_{t\infty} = 0,86$

e Pe_t é o número de Péclet turbulento, obtido por,

$$Pe_t = (\epsilon m / \nu) Pr \quad (2.85)$$

Estes modelos propostos para o cálculo do número de Prandtl turbulento são válidos para um escoamento de ar, de tal forma que isto limita o presente trabalho a solução de escoamentos de ar.

Com os modelos propostos para ϵm e ϵh , forma-se um sistema de equações diferenciais baseado nos parâmetros médios do escoamento.

2.6. EQUAÇÕES PARA UM ESCOAMENTO BI-DIMENSIONAL ELÍPTICO

Apesar de saber-se que um escoamento turbulento é tridimensional, ir-se-á, para o problema físico proposto, adequar as equações a um sistema coordenado bi-dimensional, guardando nas constantes experimentais as implicações da tridimensionalidade do escoamento turbulento.

Considerando para o escoamento turbulento o sistema coordenado dado na Figura 1 e as equações indiciais relatadas na seção (2.4), tais equações passam a ser escritas na seguinte forma,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nu + 2\epsilon m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - 2\bar{q} \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \epsilon m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \epsilon m \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nu + \epsilon m) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \epsilon m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + 2\epsilon m) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - 2\bar{q} \right] \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nu + \theta \epsilon m) \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \theta \epsilon m) \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right] - \\ 2\nu \bar{D} + \epsilon m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + 2\epsilon m \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{D}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{D}}{\partial y} = -2C_1 \frac{\bar{D}}{\bar{q}} \epsilon m \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right] -$$

$$2\nu C_2 \frac{\bar{D}^2}{\bar{q}} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(C'_3 \epsilon m + \nu) \frac{\partial \bar{D}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(C'_3 \epsilon m + \nu) \frac{\partial \bar{D}}{\partial y} \right] \quad (2.90)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\epsilon h + \frac{k}{\rho C_p} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\epsilon h + \frac{k}{\rho C_p} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right]$$

$$\frac{2\mu}{\rho C_p} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \right] + 2\bar{D} + 2 \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x \partial x} + \right.$$

$$\left. 2 \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial y \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\epsilon_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} \left(\epsilon_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} \left(\epsilon_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right\} \quad (2.91)$$

O sistema composto por estas equações, cujas incógnitas são \bar{u} , \bar{v} , \bar{q} , \bar{D} , \bar{T} e $\bar{\phi}$, é passível de solução numérica.

2.7. EQUAÇÕES BIDIMENSIONAIS PARA A CAMADA LIMITE TURBULENTA

Conforme a seção 2.6, o sistema composto pelas equações (2.86) a (2.91) é aplicável ao escoamento turbulento bidimensional.

Porém, se for considerada apenas a região deste escoamento próxima à parede, isto é, na camada limite, alguns termos podem ser simplificados pela sua pequena influência nos balanços que tais equações representam.

Para se obterem as simplificações desejadas, usa-se a análise da ordem de grandeza dos termos das equações, com base nas escalas de comprimento L_1 e L_2 , representantes de x e y respectivamente, na camada limite, tal que,

$$\frac{L_2}{L_1} \ll 1 \quad . \quad (2.92)$$

Com o uso da relação (2.92), a equação da conservação da massa, quanto a sua grandeza é expressa por,

$$\frac{O(\bar{u})}{O(L_1)} \approx \frac{O(\bar{v})}{O(L_2)}$$

ou seja,

$$\frac{O(\bar{v})}{O(\bar{u})} \approx \frac{O(L_2)}{O(L_1)} \ll 1 \quad . \quad (2.93)$$

Estas ordens de grandeza indicam termos das equações cujas influências no balanço estudado são desprezíveis. Na camada limite, define-se uma escala de velocidades, u_∞ e de comprimento em y , a espessura da camada limite, δ . Com estas escalas e as relações dadas em (2.92) e (2.93), a análise da grandeza e influência de cada termo nas equações analisadas, está feita no apêndice "A", do qual se obtém os seguintes resultados para o sistema de equações em estudo,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (2.94)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \epsilon m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x} \quad (2.96)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \epsilon m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \theta \epsilon m) \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right] - 2\nu \bar{D} \quad (2.97)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{D}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{D}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(C'_3 \epsilon_m + \nu) \frac{\partial \bar{D}}{\partial y} \right] - 2C_1 \frac{\bar{D}}{\bar{q}} \epsilon_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - 2\nu C_2 \frac{\bar{D}^2}{\bar{q}} \quad (2.98)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\alpha + \epsilon h) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + \frac{4\nu \bar{D}}{C_p} + \frac{2\nu}{C_p} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 +$$

$$\frac{4\nu}{C_p} \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial y \partial y} - \frac{2\nu}{C_p} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\epsilon_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} \left(\epsilon_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] \quad (2.99)$$

Estas equações, juntamente com os modelos propostos para a viscosidade turbulenta e o coeficiente de difusão térmica turbulenta, formam o modelo aplicável matematicamente ao problema físico proposto, da camada limite térmica turbulenta.

A solução deste modelo consiste na obtenção dos perfis de velocidade média, energia cinética turbulenta, taxa de dissipação, temperatura média e uma série de outros parâmetros de interesse que permitem obter um completo conhecimento da camada limite turbulenta.

Para se obter esta solução, é necessário fixarem-se as condições de contorno para definir a região de validade do sistema.

2.8. CONDIÇÕES DE CONTORNO

O problema físico do escoamento de fluido é um problema de equilíbrio, segundo Ames (1) onde a configuração de equilíbrio de um domínio é obtida resolvendo um sistema de equações diferenciais com condições prescritas em todo o contorno do do-

mínio. Para este problema, as equações que o governam são equações elípticas.

Porém, quando dirige-se a atenção para a camada limite turbulenta, o problema físico é um problema de propagação, segundo Ames (1), onde se deseja obter o comportamento subsequente das variáveis de um sistema, dados seus valores iniciais, caracterizando um problema de deslocamento de uma fronteira ao longo de uma direção. Para este problema, as equações que o governam são equações parabólicas, tal que, para a sua solução, são necessárias condições de contorno e condições iniciais.

As condições iniciais são dadas no apêndice E, para um ponto x_0 , de início de computação do problema.

As condições de contorno que delimitam o domínio de validade das equações, são a superfície onde ocorre o escoamento, isto é, a formação da camada limite turbulenta, e o escoamento livre.

Para as velocidades \bar{u} e \bar{v} , as condições de contorno são as seguintes,

na parede $\rightarrow y = 0$

$$\bar{u} = 0 \quad (2.100)$$

$$\bar{v} = 0 \quad (2.101)$$

no escoamento livre $\rightarrow y \rightarrow \delta$

$$\bar{u} \rightarrow u_\infty \quad (2.102)$$

A condição de contorno para \bar{v} , quando $y \rightarrow \delta$, é obtida usando, com base na equação (2.94),

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$$

e, sabendo que u_∞ é constante em y ,

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{y \rightarrow \delta} \rightarrow 0$$

assim, substituindo-se estas condições na equação (2.95), combinada com (2.96), obtém-se

$$-\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \epsilon m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]. \quad (2.103)$$

A expressão (2.103), quando $y \rightarrow \delta$, se torna na condição de contorno para \bar{v} , que é,

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)_{y \rightarrow \delta} = \frac{1}{u_\infty} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x}. \quad (2.104)$$

As condições de contorno para a energia cinética turbulenta, \bar{q} , são obtidas da definição desta, equação (2.30), onde, na parede, u' e v' devem anular-se, tal que, na parede, $y = 0$

$$\bar{q} = 0. \quad (2.105)$$

Na região externa à camada limite turbulenta, a energia cinética turbulenta tende à energia cinética do escoamento turbulento livre, que é um valor constante. Com isto, duas condições de contorno são atribuídas para \bar{q} , quando $y \rightarrow \delta$, as quais são,

$$\bar{q} \rightarrow \bar{q}_{\infty} \quad (2.106)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right)_{y \rightarrow \delta} \rightarrow 0 \quad (2.107)$$

As condições de contorno para a taxa de dissipação, $\bar{\nu}$, são obtidas, na parede, segundo Rotta (20), num ponto de referência $y_S^+ = 5$, tal que,

$$\bar{\nu}_S = \frac{1}{2} \frac{(\epsilon m)_S}{\nu} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_S^2 \quad (2.108)$$

valor este que é assumido constante entre $y=0$ e y_S tal que $y_S^+ = 5$, e quando $y \rightarrow \delta$, a condição é obtida do fato de na região externa à camada limite turbulenta, a taxa de dissipação tender a um valor constante, tal que,

$$\bar{\nu} \rightarrow \bar{\nu}_{\infty} \quad (2.109)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial y} \right)_{y \rightarrow \delta} \rightarrow 0 \quad (2.110)$$

As condições de contorno para a temperatura \bar{T} são as condições impostas, tal que, na parede, $y = 0$

$$\bar{T} = T_p \quad (2.111)$$

T_p é a distribuição de temperatura na parede, a qual pode ser constante, uma função imposta em x , ou variável conforme o fluxo de calor na parede, que pode ser imposto ou não.

Na região externa à camada limite turbulenta, a tempera-

tura tende à do escoamento livre, tal que, se atribui duas condições de contorno para a temperatura, quando $y \rightarrow \delta$, que são,

$$\bar{T} \rightarrow T_\delta \quad (2.112)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right|_{y \rightarrow \delta} \rightarrow 0 \quad (2.113)$$

Estas condições de contorno formam as restrições impostas às equações do sistema, tal que se possa aplicá-lo ao problema físico proposto, da camada limite turbulenta.

Vistas as equações, os modelos necessários para torná-las solúveis, as condições de contorno e os perfis iniciais, o trabalho se dirige para o desenvolvimento de um algoritmo numérico, que permita solucionar o problema proposto, obtendo-se os parâmetros desejados.

C A P Í T U L O 3

ALGORITMO NUMÉRICO

Neste capítulo será apresentado o algoritmo computacional utilizado para resolver o sistema de equações, proposto na seção 2.7, aplicadas à camada limite turbulenta, com as condições de contorno descritas na seção 2.8.

Para a solução numérica das equações, usa-se um método implícito de diferenças finitas, o que permite um maior valor ao incremento Δx ao longo do escoamento, pelo fato de se ter um sistema de equações estável ao longo do escoamento.

Assim, o valor do incremento Δx , que influirá na precisão dos resultados, deve ser tal que se permita obter resultados aceitáveis para um tempo de computação pequeno.

Para o incremento Δy , usa-se um valor variável tal que para a região próxima a parede possa se obter um maior número de pontos e portanto maior quantidade de informações desta região e, que para a região afastada da parede se tenha um incremento maior, sem perda de informações sobre o escoamento mas com ganho no tempo de computação de cada seção.

3.1. EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS

Para se obter o número de pontos necessários para cobrir a espessura da camada limite turbulenta como um valor aproximadamente constante ao longo do escoamento e permitir que se te-

nha uma grade numérica constante na discretização do problema, é necessária uma transformação de coordenadas, com a adimensionalização do sistema de equações do problema conforme os parâmetros,

$$\xi(x) = \int_0^x \frac{u_{\infty}(x')}{\nu} dx' \quad (3.1)$$

e,

$$\eta(x, y) = \frac{u_{\infty}(x) y}{\nu (2\xi)^n} \quad (3.2)$$

onde n , segundo Schlichting (21) varia entre 0,5 e 0,8 para a camada limite turbulenta, ξ representa o número de Reynolds ao longo do escoamento e η a relação entre os números de Reynolds ao longo da seção do escoamento e ao longo do escoamento, isto é, relaciona as forças viscosas do escoamento nas direções coordenadas, através de relações entre as propriedades nestas direções.

Para a adimensionalização do sistema de equações, conforme está realizada no apêndice C, são usadas as seguintes formas adimensionais para as variáveis do problema,

$$u = \bar{u}/u_{\infty} \quad (3.3)$$

$$v = \bar{v}/u_{\infty} \quad (3.4)$$

$$q = \frac{\bar{q}}{u_{\infty}^2} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{D} = \frac{\bar{\mathcal{D}} v^2}{u_\infty^4} \quad (3.6)$$

$$\theta = \frac{\bar{T} - T_p}{T_f - T_p} \quad (3.7)$$

Com isto, é obtido o seguinte sistema de equações adimensionalizadas,

$$(2\xi)^{2n} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(2\xi)^{2n} u n}{\xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (3.8)$$

$$(2\xi)^{2n} u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon m}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] +$$

$$\frac{(2\xi)^{2n}}{u_\infty} (1-u^2) \frac{du_\infty}{d\xi} \quad (3.9)$$

$$(2\xi)^{2n} u \frac{\partial q}{\partial \xi} + v \frac{\partial q}{\partial \eta} = \frac{\varepsilon m}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{2uq(2\xi)^{2n}}{u_\infty} \frac{du_\infty}{d\xi} +$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \theta_A \frac{\varepsilon m}{v} \right) \frac{\partial q}{\partial \eta} \right] - 2(2\xi)^{2n} \mathcal{D} \quad (3.10)$$

$$(2\xi)^{2n} u \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + C_3' \frac{\varepsilon m}{v} \right) \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \eta} \right] -$$

$$2C_1 \frac{\mathcal{D} \varepsilon m}{q v} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 - 2C_2 (2\xi)^{2n} \frac{\mathcal{D}^2}{q} - \frac{4u\mathcal{D}(2\xi)^{2n}}{u_\infty} \frac{du_\infty}{d\xi} \quad (3.11)$$

$$(2\xi)^{2n} u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{\alpha}{v} + \frac{\epsilon h}{v} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] -$$

$$\frac{u \theta (2\xi)^{2n}}{(T_f - T_p)} \left[\frac{dT_f}{d\xi} - \frac{dT_p}{d\xi} \right] - \frac{u (2\xi)^{2n}}{(T_f - T_p)} \frac{dT_p}{d\xi} + \frac{4u_\infty^2 (2\xi)^{2n} \mathcal{D}}{C_p (T_f - T_p)} +$$

$$\frac{2u_\infty^2}{C_p (T_f - T_p)} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{4u_\infty^2}{C_p (T_f - T_p)} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - \frac{2u_\infty^2}{C_p (T_f - T_p) (2\xi)^n} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} -$$

$$\frac{2u_\infty^2}{C_p (T_f - T_p)} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2u_\infty}{C_p (T_f - T_p)} \left[\frac{du_\infty}{d\xi} - \frac{nu_\infty}{\xi} \right] \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{6u_\infty}{C_p (T_f - T_p)} \left[\frac{du_\infty}{d\xi} - \frac{2nu_\infty}{3\xi} \right] \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

(3.12)

onde, na equação (3.12) são usadas as relações abaixo, para P e F ,

$$P = \frac{\epsilon m}{v} \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (3.13)$$

$$F = \frac{\epsilon m}{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (3.14)$$

Para a solução do sistema formado pelas equações (3.9) a (3.12), que é o sistema de equações adimensionais propostas para resolver o problema da camada limite térmica, com gradiente de pressão variável, para um fluxo de ar, num escoamento permanente e incompressível, é necessário que se obtenham as equações, ou modelos, propostas para a viscosidade turbulenta e o coeficiente de difusão térmica turbulenta em uma forma adimensional, tal que,

$$\frac{\varepsilon m}{\nu} = A \left[\frac{u_* (2\xi)^n}{u_\infty} \right]^2 \eta^2 \quad (3.15)$$

e,

$$\frac{\varepsilon m}{\nu} = \left[a \frac{u_* (2\xi)^n}{u_\infty} \eta + b \right] \frac{q^2}{D} \quad (3.16)$$

Estas equações são usadas em regiões distintas, tendo um ponto em comum, determinado pela comparação com a hipótese de Van-Driest para a viscosidade turbulenta, sendo então usada a equação (3.15) para a região próxima à parede e a equação (3.16) para a região a partir do ponto em comum.

Para a obtenção do coeficiente de difusão térmica turbulenta adimensional é usada a seguinte expressão,

$$\frac{\varepsilon h}{\nu} = \frac{\varepsilon m / \nu}{Pr_t} \quad (3.17)$$

Assim como os modelos de viscosidade turbulenta, as condições de contorno devem ser adimensionalizadas para as coordenadas transformadas ξ e η , tal que, quando $y=0$, $\eta=0$, obtêm-se o seguinte grupo de condições de contorno,

$$u = 0; \quad v = 0; \quad q = 0; \quad \theta = 0 \quad (3.18)$$

Quando $y=y_S$, valor de referência para a obtenção da taxa de dissipação junto à parede, $\eta=\eta_S$ e a taxa de dissipação é,

$$D_S = \frac{\varepsilon m_S}{2\nu} \frac{1}{(2\xi)^{2n}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_S^2 \quad (3.19)$$

Quando y tende à espessura da camada limite turbulenta δ , a coordenada η tende a um valor η_δ e obtém-se o seguinte grupo de condições de contorno na coordenada η_δ ,

$$u \rightarrow 1; \quad q \rightarrow \frac{q_\infty}{u_\infty^2}; \quad \mathcal{D} \rightarrow \frac{\mathcal{D}_\infty v^2}{u_\infty^4}; \quad \theta \rightarrow 1 \quad (3.20)$$

e, para as condições de contorno com base no fluxo entre o escoamento livre e a camada limite turbulenta, obtém-se,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta_\delta} \rightarrow 0; \quad \left. \frac{\partial q}{\partial \eta} \right)_{\eta_\delta} \rightarrow 0; \quad \left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \eta} \right)_{\eta_\delta} \rightarrow 0; \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta_\delta} \rightarrow 0. \quad (3.21)$$

Para a coordenada η_δ a equação (2.104) é adimensionalizada na seguinte forma,

$$\frac{u_\infty^2}{v(2\xi)^n} \left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta_\delta} = \frac{1}{u_\infty} \frac{u_\infty}{v} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \xi}. \quad (3.22)$$

Com o uso da equação (c.23) do apêndice C, a equação (3.22) é expressa como segue,

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta_\delta} = - \frac{(2\xi)^n}{u_\infty} \frac{du_\infty}{d\xi} \quad (3.23)$$

Esta é a condição de contorno para v na coordenada η_δ . Segundo a equação (c.11), do apêndice C, v tem a seguinte distribuição, para cada seção do escoamento,

$$v = \frac{V}{(2\xi)^n} - \frac{u\eta(2\xi)^n}{u_\infty} \left[\frac{du_\infty}{d\xi} - \frac{n u_\infty}{\xi} \right] . \quad (3.24)$$

Na equação (3.24) o parâmetro V tem os seguintes valores,

$$V = 0, \text{ quando } \eta = 0$$

e, quando $\eta = \eta_\delta$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_{\eta_\delta} = (2\xi)^{2n} \left[\frac{(u_\infty - 1)}{u_\infty} \frac{du_\infty}{d\xi} - \frac{n u_\infty}{\xi} \right] . \quad (3.25)$$

3.2. MODELO COMPUTACIONAL EM DIFERENÇAS FINITAS

Para a solução do problema proposto, as equações do sistema que o representa, são discretizadas em diferenças finitas, através de um método implícito, formando um sistema de equações algébricas que podem ser solucionadas numericamente.

Esta discretização é feita com base nos incrementos $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$, nas direções coordenadas transformadas ξ e η .

Devido ao comportamento da camada limite, que se caracteriza por ter gradientes acentuados junto à parede, é conveniente escolher-se uma malha variável, com pequenos intervalos próximo a parede, aumentando ao se afastar dela, na direção da coordenada transformada η , numa forma tal que um incremento seja o incremento anterior multiplicado por um coeficiente BK , na seguinte forma,

$$\Delta \eta_j = BK \Delta \eta_{j-1} \quad (3.26)$$

Nesta equação, BK é um valor entre 1,03 e 1,09, segundo Cebeci (4).

Na direção do escoamento, usa-se um incremento constante $\Delta \xi$.

Desta maneira, é obtida a seguinte grade numérica na camada limite turbulenta:

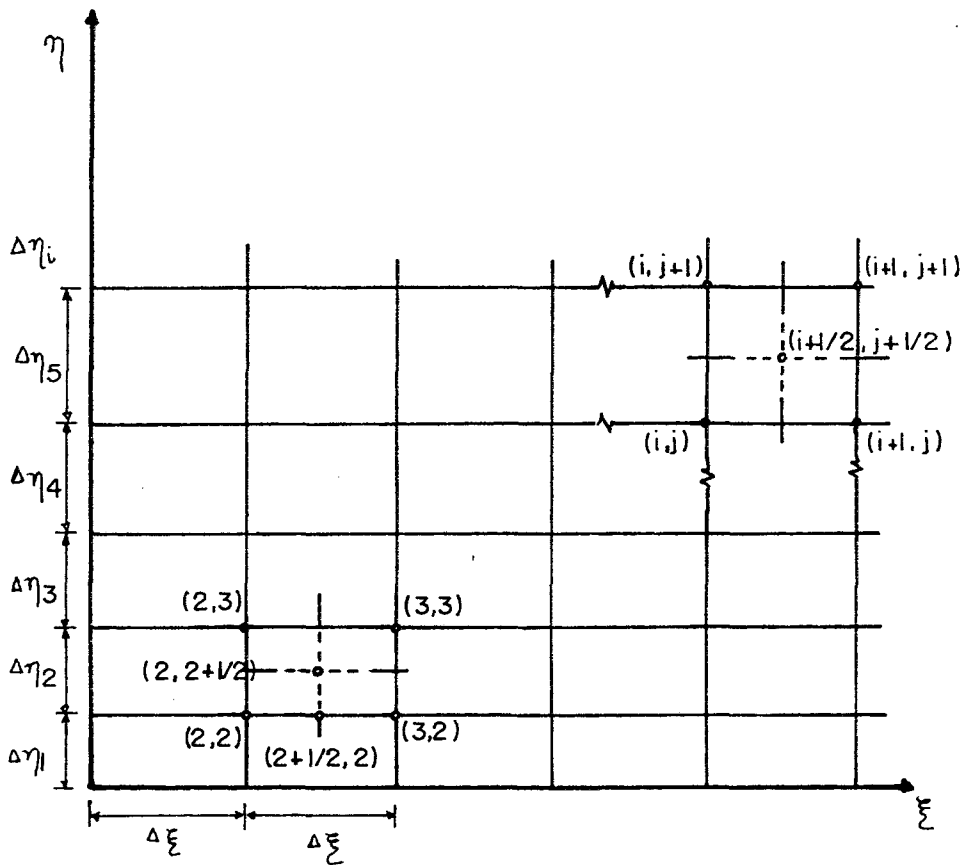


FIG. 3.1 - GRADE COMPUTACIONAL USADA

Com o auxílio da grade numérica, é feita a discretização de uma função em torno de um ponto genérico $P_{i+1/2, j}$, na seguinte forma,

$$\delta_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} (\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j}) \quad (3.27)$$

$$\delta_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{4} (\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j} + \delta_{i+1,j+1} + \delta_{i+1,j}) \quad (3.28)$$

As derivadas de uma função em relação a ξ e η , são representadas por,

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial \xi} \right)_{i+1/2,j} = \frac{\delta_{i+1,j} - \delta_{i,j}}{\Delta \xi} \quad (3.29)$$

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial \eta} \right)_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_{i+1,j+1} - \delta_{i+1,j-1}}{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}} + \frac{\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}}{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}} \right) \quad (3.30)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(M \frac{\partial \delta}{\partial \eta} \right) \right]_{i+1/2,j} = \frac{M_{i+1/2,j+1/2} (\delta_{i+1,j+1} - \delta_{i+1,j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{M_{i+1/2,j-1/2} (\delta_{i+1,j} - \delta_{i+1,j-1})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})}$$

$$+ \frac{M_{i+1/2,j+1/2} (\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{M_{i+1/2,j-1/2} (\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \quad (3.31)$$

$$\left[MN \left(\frac{\partial \delta}{\partial \eta} \right)^2 \right]_{i+1/2,j} = (NM)_{i+1/2,j} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \eta} \right)_{i+1/2,j}^{k-1} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \eta} \right)_{i+1/2,j}^k \quad (3.32)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial \eta \partial \xi} \right)_{i+1/2,j} = \frac{1}{2 \Delta \xi \Delta \eta_j \Delta \eta_{j+1}} \left[\Delta \eta_j (\delta_{i+1,j+1} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} + \delta_{i,j}) + \right.$$

$$\left. \Delta \eta_{j-1} (\delta_{i+1,j} - \delta_{i+1,j-1} - \delta_{i,j} + \delta_{i,j-1}) \right] \quad (3.33)$$

Na equação (3.32) k se refere à iteração em execução e $k-1$ à iteração anterior.

A linearização do sistema de equações é conseguida introduzindo-se as formas de discretização citadas, nas equações adimensionalizadas, separando os termos tal que se obtenha, para cada equação do sistema, uma expressão na forma,

$$A_j \delta_{i+1,j+1} + B_j \delta_{i+1,j} + C_j \delta_{i+1,j-1} = D_j \quad (3.34)$$

A obtenção destas expressões para cada equação do sistema está realizada no apêndice D.

Desta maneira é obtido o seguinte sistema de equações tridiagonais,

$$AMJ(V_{i+1,j+1}) + CMJ(V_{i+1,j-1}) = DMJ \quad (3.35)$$

$$AJ(u_{i+1,j+1}) + BJ(u_{i+1,j}) + CJ(u_{i+1,j-1}) = DJ \quad (3.36)$$

$$AQJ(q_{i+1,j+1}) + BQJ(q_{i+1,j}) + CQJ(q_{i+1,j-1}) = DQJ \quad (3.37)$$

$$ADJ(D_{i+1,j+1}) + BDJ(D_{i+1,j}) + CDJ(D_{i+1,j-1}) = DDJ \quad (3.38)$$

$$ATJ(\theta_{i+1,j+1}) + BTJ(\theta_{i+1,j}) + CTJ(\theta_{i+1,j-1}) = DTJ. \quad (3.39)$$

Nestas equações, os coeficientes AJ , BJ , CJ e DJ , tem suas expressões determinadas no apêndice D.

A solução de um sistema de equações tridiagonais genérico, equação (3.34), é obtida, segundo Ames (1), pela seguinte

expressão,

$$\delta_{i+1,j} = G_j \delta_{i+1,j+1} + g_j \quad (3.40)$$

Na equação (3.40), os valores de G_j e g_j são obtidos por relações entre os coeficientes A , B , C e D , da equação (3.34), na seguinte forma,

$$G_j = \frac{-A_j}{B_j + C_j G_{j-1}} \quad (3.41)$$

$$g_j = \frac{D_j - C_j g_{j-1}}{B_j + C_j G_{j-1}} \quad (3.42)$$

Assim, para cada equação de (3.35) à (3.39), é obtido um par G_j , g_j de forma que se pode obter o perfil de cada variável, conforme a equação (3.34), quando conhecido o perfil da variável na seção anterior, da seguinte forma,

$$u_{i+1,j} = G_j u_{i+1,j+1} + g_j \quad (3.43)$$

$$q_{i+1,j} = G Q_j q_{i+1,j+1} + g Q_j \quad (3.44)$$

$$D_{i+1,j} = G D_j D_{i+1,j+1} + g D_j \quad (3.45)$$

$$\theta_{i+1,j} = G T_j \theta_{i+1,j+1} + g T_j \quad (3.46)$$

A velocidade v é obtida da análise de V , cujo perfil é encontrado ao se introduzir o perfil de $u_{i+1,j}$ na equação (3.35).

Para a solução das equações (3.43) a (3.46), é necessário se estabelecer o valor limite do número de pontos, NP , na direção η , que permita computar a espessura da camada limite turbulenta.

O número de pontos é o ponto de partida para a solução de cada equação, pois, em $NP=j+1$, as condições de contorno em $\eta=\eta_\delta$ são utilizadas para o cálculo das distribuições das variáveis do problema.

Na obtenção dos valores G_j e g_j , as condições de contorno na parede são utilizadas para a determinação dos valores de G_1 e g_1 necessários para processar as equações (3.41) e (3.42).

Estes valores são, para a velocidade, energia cinética turbulenta e temperatura,

$$G_1 = 0 \quad , \quad g_1 = 0 \quad . \quad (3.47)$$

Para a taxa de dissipação, cuja condição de contorno na parede é obtida numa coordenada η_S , obtém-se,

$$G_S = 0 \quad , \quad g_S = \mathcal{D}_S \quad . \quad (3.48)$$

A obtenção do número de pontos NP é realizada utilizando-se o somatório dos incrementos em η ,

$$\sum_{\ell=1}^{NMAX} \Delta\eta_\ell = \delta$$

tal que, quando este somatório for igual à espessura na camada limite turbulenta, $NP = NMAX$.

É considerada a espessura da camada limite o ponto em η

onde $\bar{u} = 0,99 u_\infty$, isto é, $u_\delta = 0,99$.

Este ponto é obtido pela condição de contorno para a velocidade u quando $\eta = \eta_\delta$, usando um critério de convergência α_v para a condição de fluxo, tal que,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta_\delta} \leq \alpha_v. \quad (3.49)$$

Esta expressão, em diferença finita, é da seguinte forma,

$$u_{i+1, NP} - u_{i+1, NP-1} \leq \Delta \eta_{NP-1} \alpha_v \quad (3.50)$$

Introduzindo a expressão (3.40) na equação (3.50), obtém-se,

$$u_{i+1, NP}^{(1-G_{NP-1})} - g_{NP-1} \leq \Delta \eta_{NP-1} \alpha_v \quad (3.51)$$

Assim, quando a equação (3.51) for satisfeita, NP é considerado o número de pontos na direção η necessários para cobrir a camada limite.

O critério de convergência para as distribuições é feito comparando os valores obtidos em duas iterações consecutivas, sendo definido por,

$$\left| \frac{\delta_{i+1,2}^k - \delta_{i+1,2}^{k-1}}{\delta_{i+1,2}^{k-1}} \right| < \alpha_c. \quad (3.52)$$

Nesta equação, α_c é o critério de convergência das distribuições, k é a iteração atual e $k-1$ a iteração anterior.

3.3. FLUXOGRAMA

Para ser possível a solução do sistema de equações numéricas com o uso do computador, é usado o seguinte procedimento:

1. São fornecidas as constantes e lidos os valores de interesse.
2. Calculados os perfis iniciais das variáveis.
3. Calculado o valor do número de pontos NP .
4. A distribuição de pressão é obtida por interpolação entre os valores lidos.
5. As distribuições da viscosidade turbulenta ϵ_m e do coeficiente de difusão térmica turbulenta ϵ_h são calculados com base nos perfis conhecidos de \bar{q} e \bar{D} .
6. Calculados os perfis de velocidade u , v e V na estação atual.
7. Analisado o critério de convergência α_c para a avaliação dos perfis de velocidade.
8. Calculados os perfis de q , D e T .
9. Calculados os parâmetros da camada limite, tais como, u_* , c_{f_x} , St_x , Re_x , Nu_x , T_* , PR_x e outros.
10. Impressão dos resultados obtidos, na forma de tabelas e gráficos.

Este procedimento gera o fluxograma dado na figura 3.2.

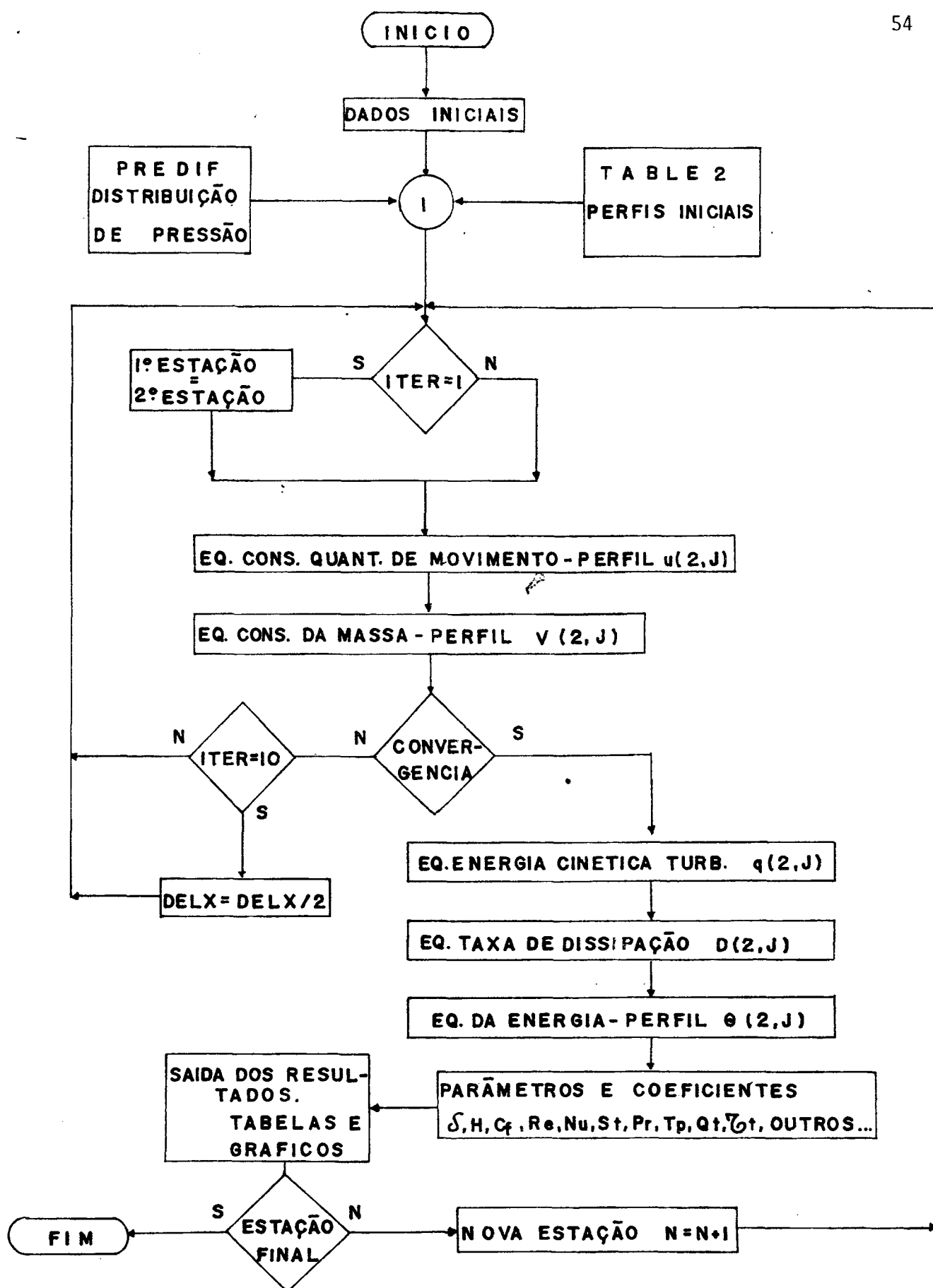


FIGURA 3.2 - DIAGRAMA DE BLOCOS

C A P Í T U L O 4

ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

4.1. INTRODUÇÃO

Para se avaliar a validade ou exatidão de um algoritmo numérico aplicável na solução de um problema físico, é necessário que os resultados dele obtidos quando usado numa situação real, para a qual existam resultados experimentais, forneçam erros dentro de uma faixa de tolerância aceitável. Isto não implica em que o método numérico desenvolvido tenha uma ampla faixa de aplicação. Situação como esta é fato comum no estudo do escoamento turbulento. Há casos em que um algoritmo desenvolvido tem aplicação somente para um determinado escoamento. Veja referência (25).

Assim, além da análise do comportamento das variáveis velocidade média, energia cinética turbulenta, taxa de dissipação, temperatura média, da análise dos modelos usados para a viscosidade turbulenta e o coeficiente de difusão térmica turbulenta, se analisam parâmetros adimensionais que definem o escoamento, os quais são os números de Reynolds, Stanton e Nusselt bem como os coeficiente de convecção, fator de forma, coeficiente de fricção, fluxo de calor na parede e as tensões cisalhantes.

4.2. ANÁLISE DO AJUSTE DA HIPÓTESE DA VISCOSIDADE TURBULENTA

Para o cálculo da viscosidade turbulenta adotada no presente trabalho são utilizadas duas hipóteses, uma na região próxima a parede e expressa pela equação (3.15) e outra hipótese pa

ra a região afastada da parede fornecida pela equação (3.16). Estas equações foram obtidas por intermédio de argumentos que, embora contenham informações do escoamento turbulento, são independentes entre si. Desta forma não é esperado que apresentem derivada contínua em todos os pontos na direção perpendicular à superfície onde a camada limite é formada. Todavia, em algum ponto dessa distribuição, essas duas equações fornecerão o mesmo valor da viscosidade turbulenta. Como na primeira equação a viscosidade turbulenta é função da distância perpendicular à parede ao quadrado, ela irá fornecer valores demasiadamente altos para pontos muito distantes da superfície e portanto incorretos. O mesmo ocorre para a hipótese da viscosidade turbulenta na região afastada da parede quando calculada para pontos próximos à parede. Torna-se desta forma, imperiosa a determinação do ponto de acoplamento destas duas hipóteses. Para tal fim calcula-se a viscosidade turbulenta utilizando-se outra hipótese, no caso a hipótese de Van-Driest (8), (20), comparando os resultados obtidos nas duas formulações.

O resultado numérico obtido para ambas as hipóteses, a de Van-Driest e a do presente trabalho, estão representadas em forma gráfica na figura 4.1.

Na obtenção dos resultados apresentados nesta figura, foi utilizado o escoamento sobre uma placa plana. A razão de tal escolha é que este escoamento foi utilizado em todo o processo de calibração do algoritmo numérico. Desta forma, o ajuste do ponto de acoplamento YIN é conseguido, quando ocorrerem as menores diferenças significativas entre as duas hipóteses.

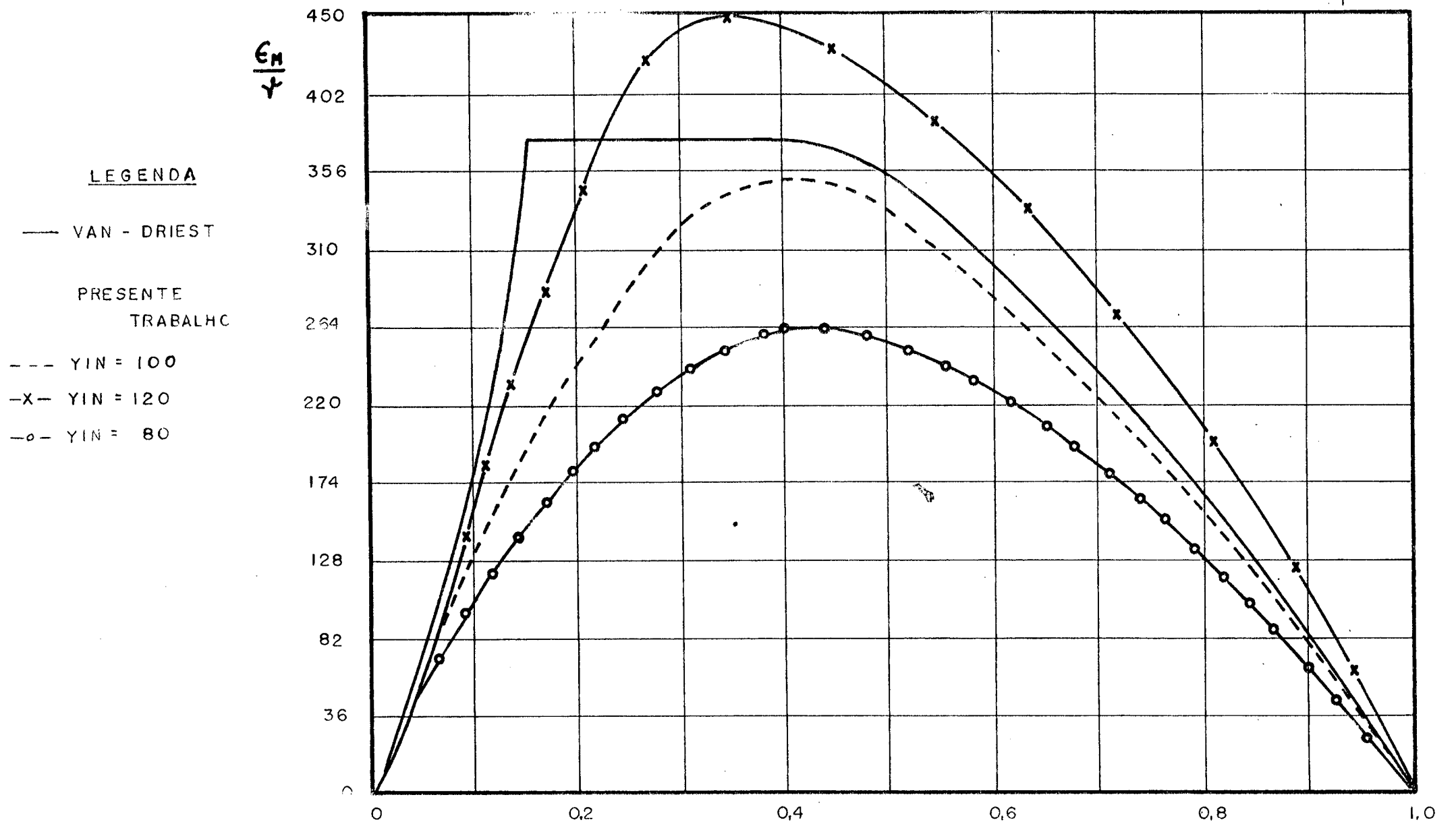


FIGURA 4.1 - HIPÓTESES PARA A VISCOSIDADE TURBULENTA

Na figura 4.1 verifica-se que para $YIN=100$ esses erros são menores, pois um acréscimo no mesmo acarreta um aumento dos valores da viscosidade turbulenta calculada pela hipótese do presente trabalho na região afastada da parede e uma diminuição de YIN acarreta um decréscimo da viscosidade turbulenta da mesma forma que anteriormente calculada.

Advoga-se aqui a universalidade deste comportamento visto que o mesmo tratamento é dado à hipótese de Van-Driest.

4.3. AJUSTE DA TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

Na equação (3.7) onde é definida a coordenada adimensional η , tem-se o expoente n , que relaciona a influência de ξ , coordenada adimensional em x , na obtenção de η , coeficiente este que, segundo Schlichting (21), varia entre 0,5 e 0,8.

Na análise do modelo numérico, verificou-se que este coeficiente tem grande influência na definição do número de pontos necessários para se cobrir a espessura da camada limite, conforme a equação (3.26).

Desta forma n é importante na precisão dos perfis obtidos e suas respectivas derivadas sendo um fator fundamental para que os resultados obtidos estejam dentro de uma faixa de valores com erros aceitáveis quando comparados com valores experimentais.

Além disso, como n define o número de pontos na direção perpendicular à superfície, tem marcante influência no tempo de computação necessário para se processar cada seção do escoamen-

to e portanto no tempo de computação necessário para percorrer uma distância de interesse na direção do escoamento.

Na Tabela 4.1 estão relacionados os valores do número de pontos e do tempo de computação para vários valores de n . Também estão comparados os valores da espessura da camada limite calculada, com o valor experimental, para que se possa definir um valor de n para o presente trabalho.

Estes valores tabelados foram obtidos para um escoamento em placa plana, caso 1400, na estação de computação correspondente a uma distância $x=0,487\text{ m}$ percorrida sobre a placa, a partir da borda de ataque, que corresponde a $0,1\text{ m}$ a partir do início de computação da camada limite. O valor experimental da espessura da camada limite é obtido de Wieghardt (25). Da análise da tabela, foi escolhido para o presente trabalho, $n=0,65$, usando como passo inicial em n o valor 5×10^{-3} . Para estes valores, ocorre um número de pontos que permite a obtenção de um perfil bem definido e portanto com gradientes próximos à parede também bem definidos, com um tempo de computação aceitável.

Na Tabela 4.1, o algoritmo computacional estará gerando resultados na estação de número 168, que corresponde a uma distância de $0,487\text{ m}$ a partir da borda de ataque, onde a espessura da camada limite experimental, segundo Wieghardt (25) é de $0,97 \times 10^{-2}\text{ m}$.

4.4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O problema proposto foi resolvido para 4(quatro) casos,

TABELA 4.1				
n	NP	DELNI	DELTA	TEMPO
0,5	77	$0,5 \times 10^{-1}$	$0,958 \times 10^{-2}$	1min 08s $\frac{88}{100}$
0,5	154	$0,5 \times 10^{-2}$	$0,103 \times 10^{-1}$	1min 56s $\frac{84}{100}$
0,5	22	0,5	$0,975 \times 10^{-2}$	45s $\frac{93}{100}$
0,65	158	$0,5 \times 10^{-3}$	$0,102 \times 10^{-1}$	2min 06s $\frac{65}{100}$
0,65	82	$0,5 \times 10^{-2}$	$0,998 \times 10^{-2}$	1min 15s $\frac{07}{100}$
0,65	61	$1,0 \times 10^{-2}$	$0,980 \times 10^{-2}$	1min 05s $\frac{79}{100}$
0,65	25	$0,5 \times 10^{-1}$	$0,103 \times 10^{-1}$	49s $\frac{53}{100}$
0,80	87	$0,5 \times 10^{-3}$	$0,104 \times 10^{-1}$	1min 17s $\frac{77}{100}$
0,80	67	$1,0 \times 10^{-3}$	$0,107 \times 10^{-1}$	1min 04s $\frac{22}{100}$
0,80	28	$0,5 \times 10^{-2}$	$0,107 \times 10^{-1}$	48s $\frac{21}{100}$
0,80	17	$1,0 \times 10^{-2}$	$0,108 \times 10^{-1}$	43s $\frac{28}{100}$

NP - NÚMERO DE PONTOS NECESSÁRIOS PARA
COMPUTAR A ESPESSURA DA CAMADA LI-
MITE COM UM ESPAÇAMENTO JUNTO A PA-
REDE DE DELNI NA DIREÇÃO η

DELTA - ESPESSURA CAMADA LIMITE
DELNI - INCREMENTO INICIAL EM η

conforme classificação da conferência de Stanford (25), os quais são:

- caso 1100 - gradiente de pressão adverso
- caso 1200 - gradiente de pressão fortemente adverso
- caso 1300 - gradiente de pressão favorável
- caso 1400 - gradiente de pressão nulo - placa plana.

A solução do algoritmo numérico permite obter:

Perfis de velocidade

Perfis de temperatura

Perfis de energia cinética turbulenta

Perfis da taxa de dissipação

Comportamento da viscosidade turbulenta e do coeficiente de difusão térmica turbulenta

Balancos realizados pelas equações em estudo

Coeficiente de fricção

Fator de forma

Números de Reynolds, Nusselt, Stanton e Prandtl

Coeficiente de convecção na parede

Fluxo de calor na parede

Tensões cisalhantes no escoamento.

A discussão destes resultados será realizada a seguir.

4.5. ANÁLISE DOS PERFIS OBTIDOS

4.5.1. VELOCIDADE

Da solução das equações da conservação da massa e da

quantidade de movimento, em cada seção de fluxo ao longo do escoamento, obtêm-se os perfis de velocidade u e v na camada limite turbulenta.

Tais resultados numéricos devem ser comprovados através da comparação com valores experimentais conhecidos.

Na figura 4.2 compara-se o perfil de velocidade u com valores experimentais fornecidos por Wieghardt, em (25), para a placa plana, caso 1400.

A comparação do resultado obtido para a placa plana é de relevante significado para a verificação do presente método visto que, através do escoamento em placa plana, foram ajustados os diferentes parâmetros da camada limite turbulenta.

Examinando o comportamento das curvas para u , calculado e experimental, verifica-se que os valores calculados seguem a variação indicada pelos pontos experimentais, tal que a divergência entre os valores de u , calculado e experimental, nunca é superior a 5%, permanecendo nesta faixa em todo o perfil.

Descontando-se os prováveis erros naturais do processo experimental, advoga-se a possibilidade de que o modelo forneça valores para a solução numérica com uma aproximação inferior a 5% em relação ao evento físico velocidade, para um escoamento em placa plana.

Também nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5 foram plotados os perfis de velocidade para os casos 1100, 1200 e 1300, cuja aproximação dada pelo modelo com resultados experimentais obtidos por Ludwig e Tillmann, encontrados em (25), mantém-se na mesma faixa de grandeza que os resultados comparativos da placa plana,

CASO 1400

$u \times y$ $v \times y$

$$u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}} \quad v = \frac{\bar{v}}{U_{\infty}}$$

y (cm)

$x_1 = 4,31$ m

LEGENDA

U ---- RESULTADO NUMERICO

U o o o WIEGHARDT

V ----

$$R_{ex} = 7,3 \times 10^6$$

$$V_{max} = 0,238 \times 10^{-2}$$

$$V_{MAX} = \left(\frac{\bar{v}}{U_{\infty}} \right)_{MAX}$$

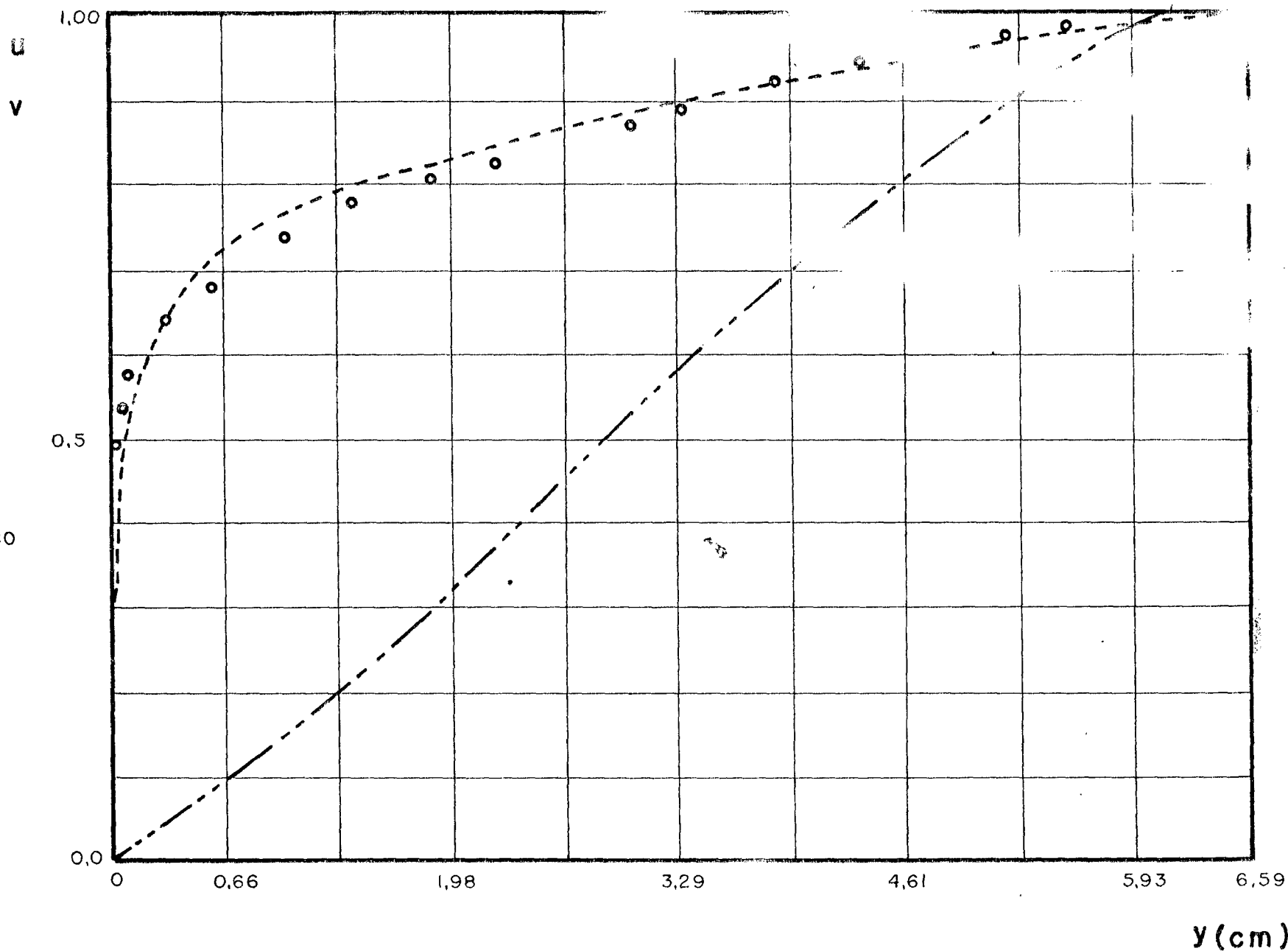


FIGURA 4.2 - COMPARAÇÃO DO PERFIL DE VELOCIDADE

CASO 1300

$u \times y \quad v \times y$

$u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}} \quad v = \frac{\bar{v}}{U_{\infty}}$

$y \text{ (cm)}$

$X_1 = 4,3 \text{ m}$

$Re_{x_1} = 7,5 \times 10^6$

LEGENDA

U ---- RESULTADO
NUMERICO

U o o o o LUDWIG E TILLMANN

V ---- NUMERICO

$V_{max} = 0,345 \times 10^{-2}$

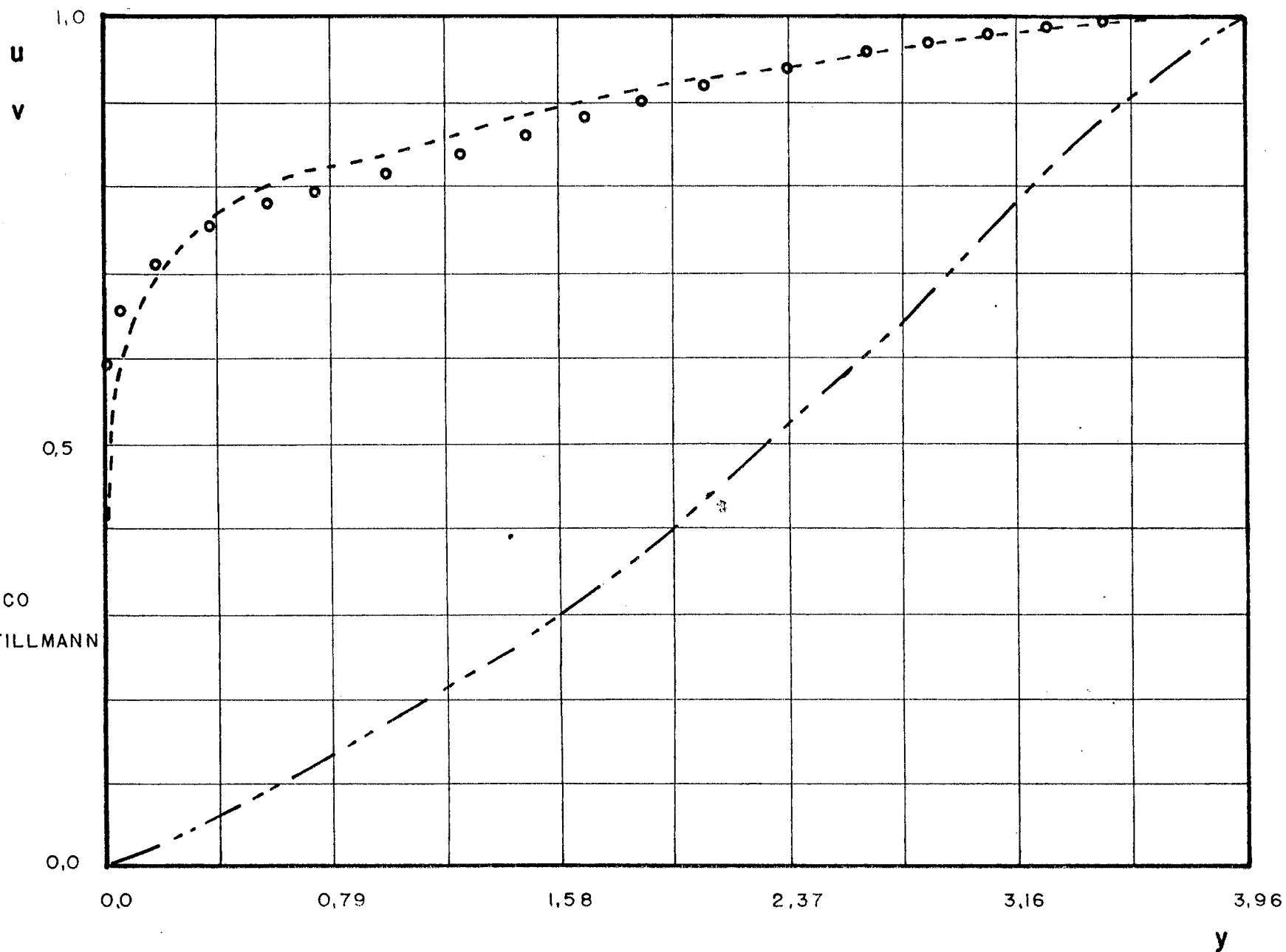


FIGURA 4.3 - COMPARAÇÃO DO PERFIL DE VELOCIDADE

CASO 1200

$u \times y$ $v \times y$

$$u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}} \quad v = \frac{\bar{v}}{U_{\infty}}$$

$y(\text{cm})$

$$x_1 = 3,00 \text{ (m)}$$

$$Re_{x_1} = 4,54 \times 10^6$$

$$V_{\max} = 0,232 \times 10^{-1}$$

LEGENDA

U ---- NUMÉRICO

U o o o o LUDWIG E TILLMANN

V ---- NUMÉRICO

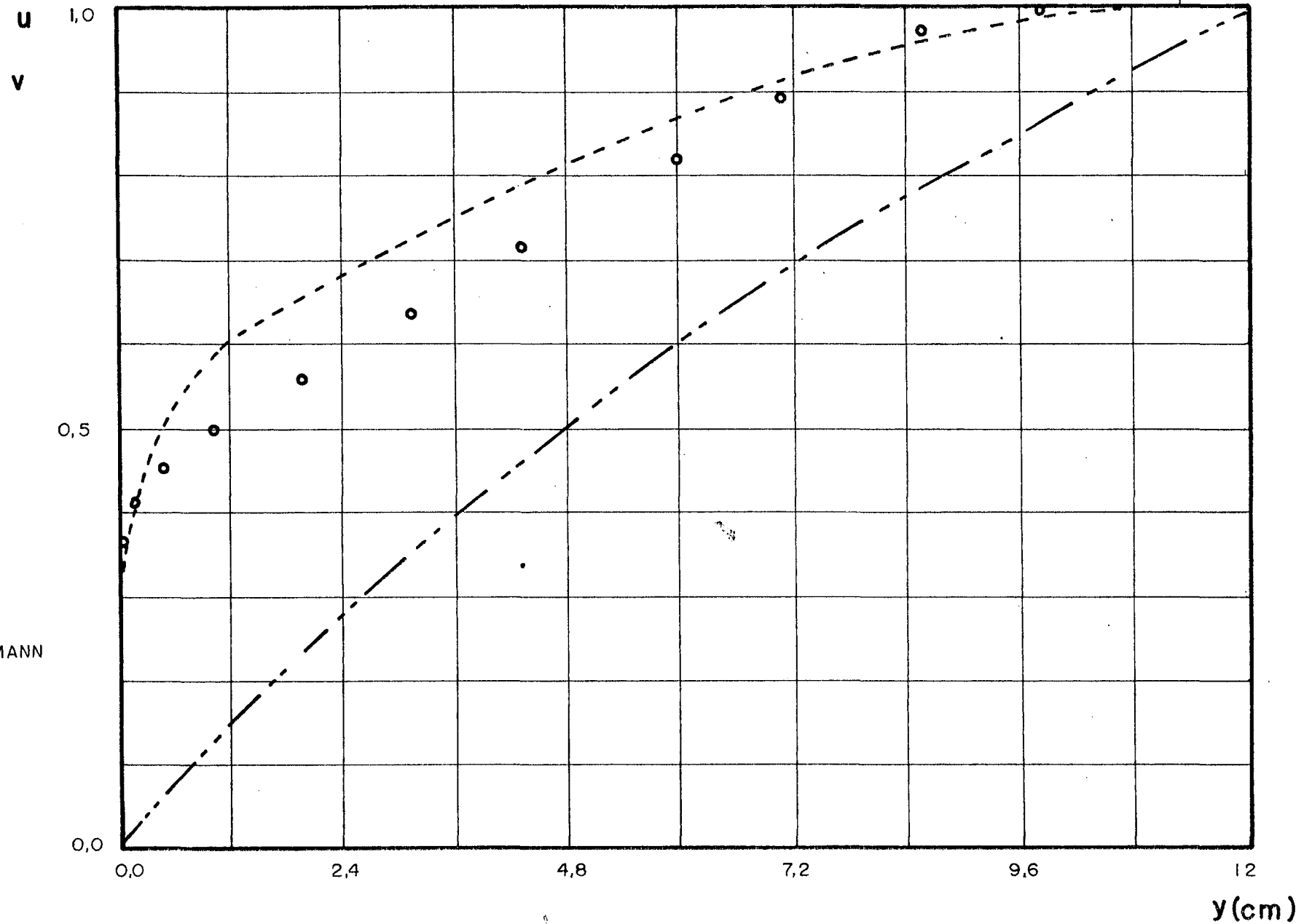


FIGURA 4.4 - COMPARAÇÃO DO PERFIL DE VELOCIDADE

CASO 1100

$u \times y$ $v \times y$

$u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}$ $v = \frac{\bar{v}}{U_\infty}$

$y(\text{cm})$

$x_1 = 3,50 \text{ (cm)}$

$Re_{x_1} = 5,58 \times 10^6$

LEGENDA

u ---- NUMÉRICO

u o o o LUDWIG E TILLMAN

v ---- NUMÉRICO

$V_{\max} = 0,186 \times 10^{-1}$

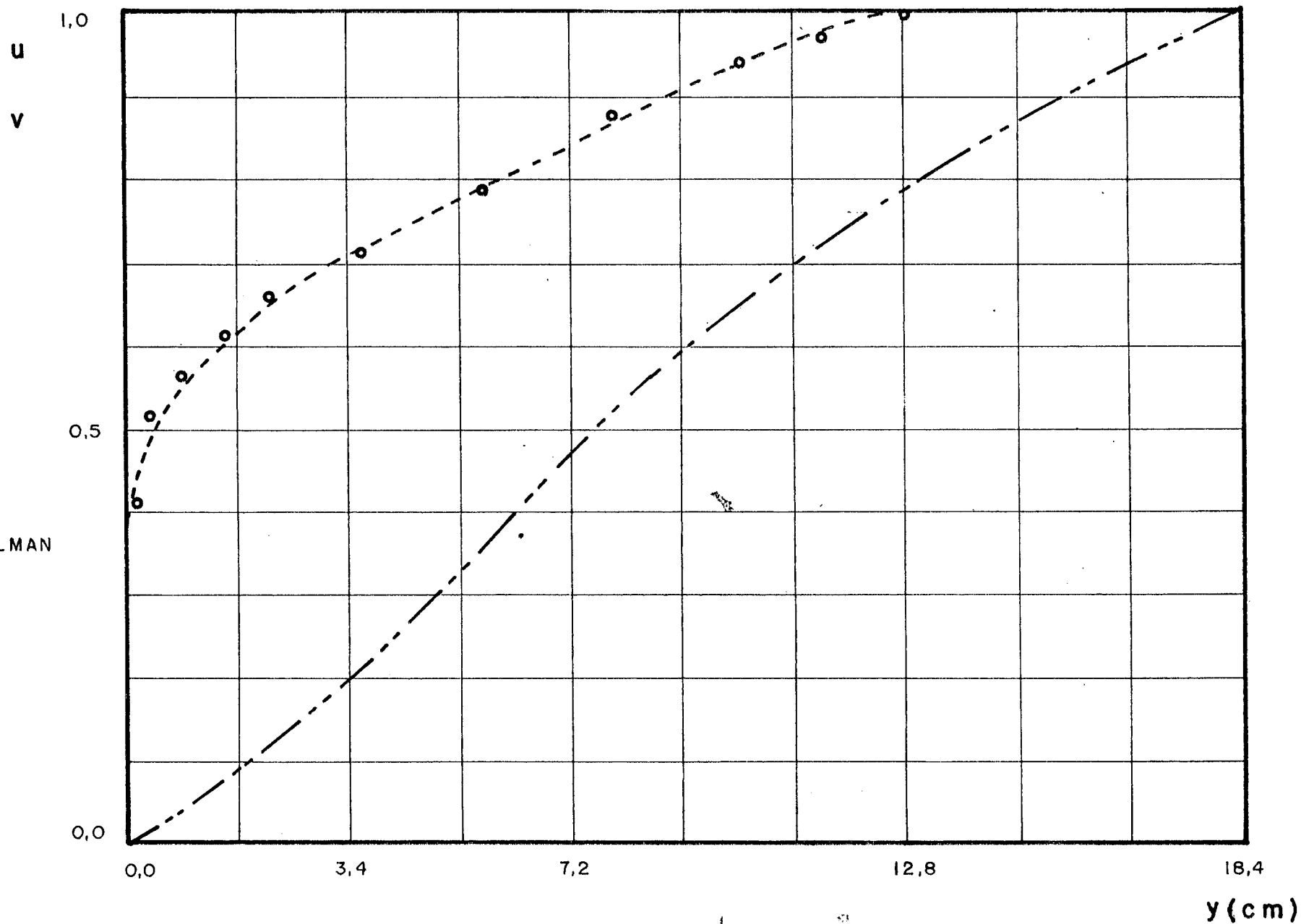


FIGURA 4.5 - COMPARAÇÃO DO PERFIL DE VELOCIDADE

para os casos 1100 e 1300, sendo que no caso 1200, o erro é da ordem de 15%, no máximo.

A velocidade v , plotada nas mesmas figuras de u , é obtida da equação (3.24), sendo plotada em função da velocidade máxima, tal que,

$$\bar{v} = (v_G \cdot v_{MAX}) \cdot u_{\infty} \quad (4.1)$$

Na equação (4.1), v_G é a velocidade lida na figura e v_{MAX} a maior velocidade na direção η , na seção de escoamento.

Como solução do problema, o perfil de velocidade adimensional, u^+ , está plotado nas figuras 4.6 a 4.9, para os casos em estudo.

Como comparação ao perfil numérico obtido, os perfis

$$u^+ = y^+ \quad \text{para} \quad y^+ < 10 \quad (4.2)$$

e

$$u^+ = 5,85 \log(y^+) + 5,56 \quad \text{para} \quad y^+ > 10, \quad (4.3)$$

estão plotados. A equação (4.3) foi obtida em Hinze (8).

Também estão plotados valores experimentais obtidos por Anderson (33), para a placa plana, onde pode se observar que a divergência entre os valores numéricos e experimentais está dentro de uma faixa de 5%.

Para a placa plana observa-se também, que as equações (4.2) e (4.3) tem uma faixa de validade onde as divergências com os valores numéricos obtidos no presente método são inferiores a 5%.

Assim, a comparação dos valores numéricos obtidos com as

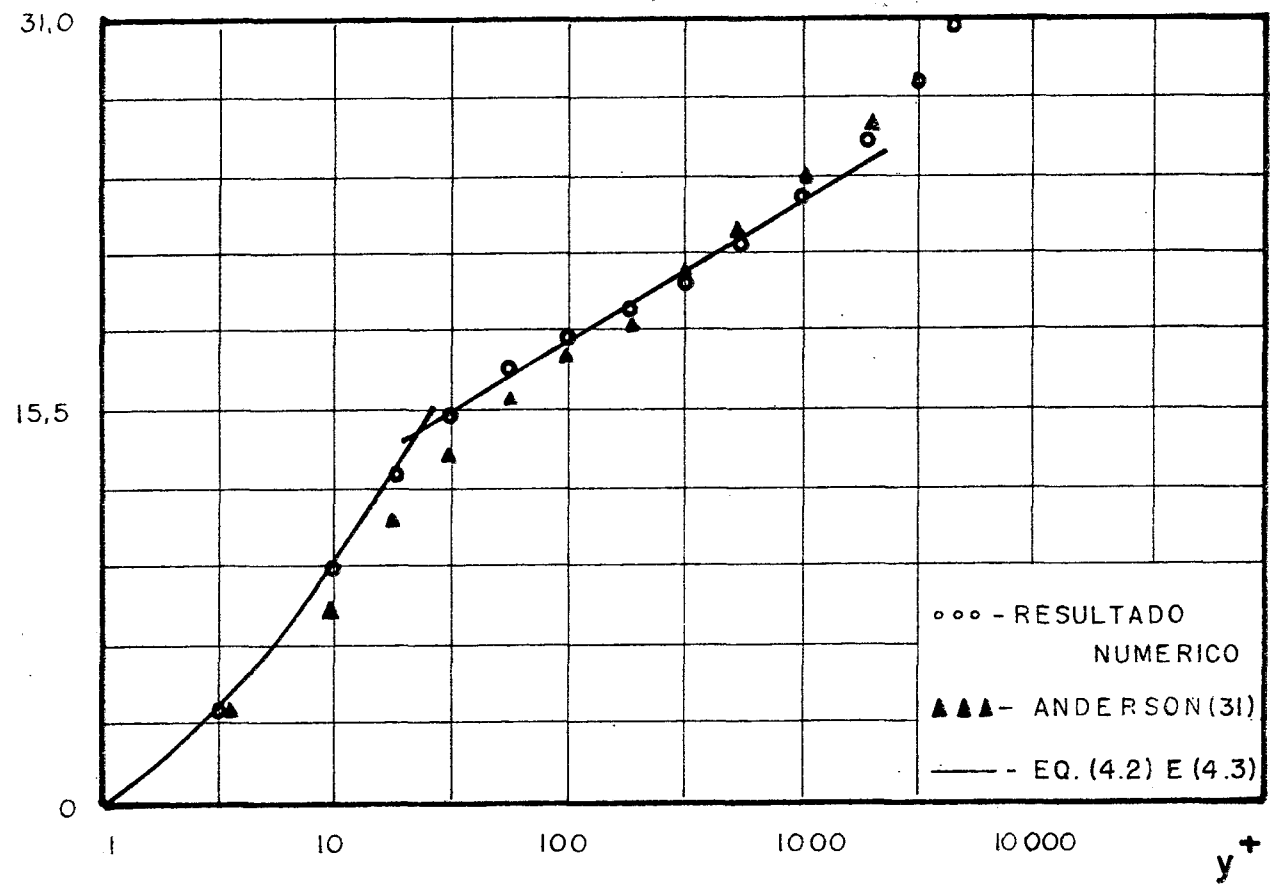


FIGURA 4.6 - PERFIL DE VELOCIDADE u^+
CASO 1400

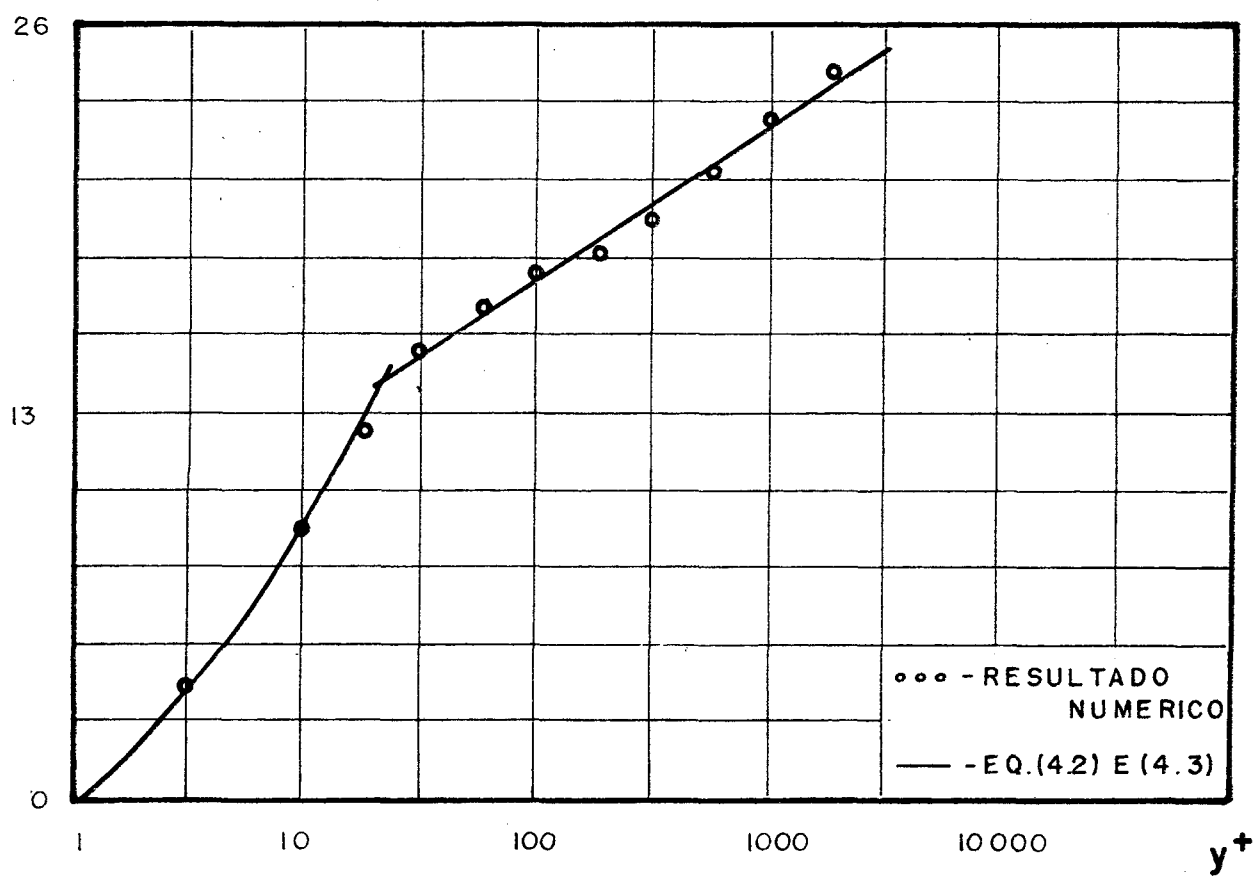


FIGURA 4.7 - PERFIL DE VELOCIDADE u^+
CASO 1300

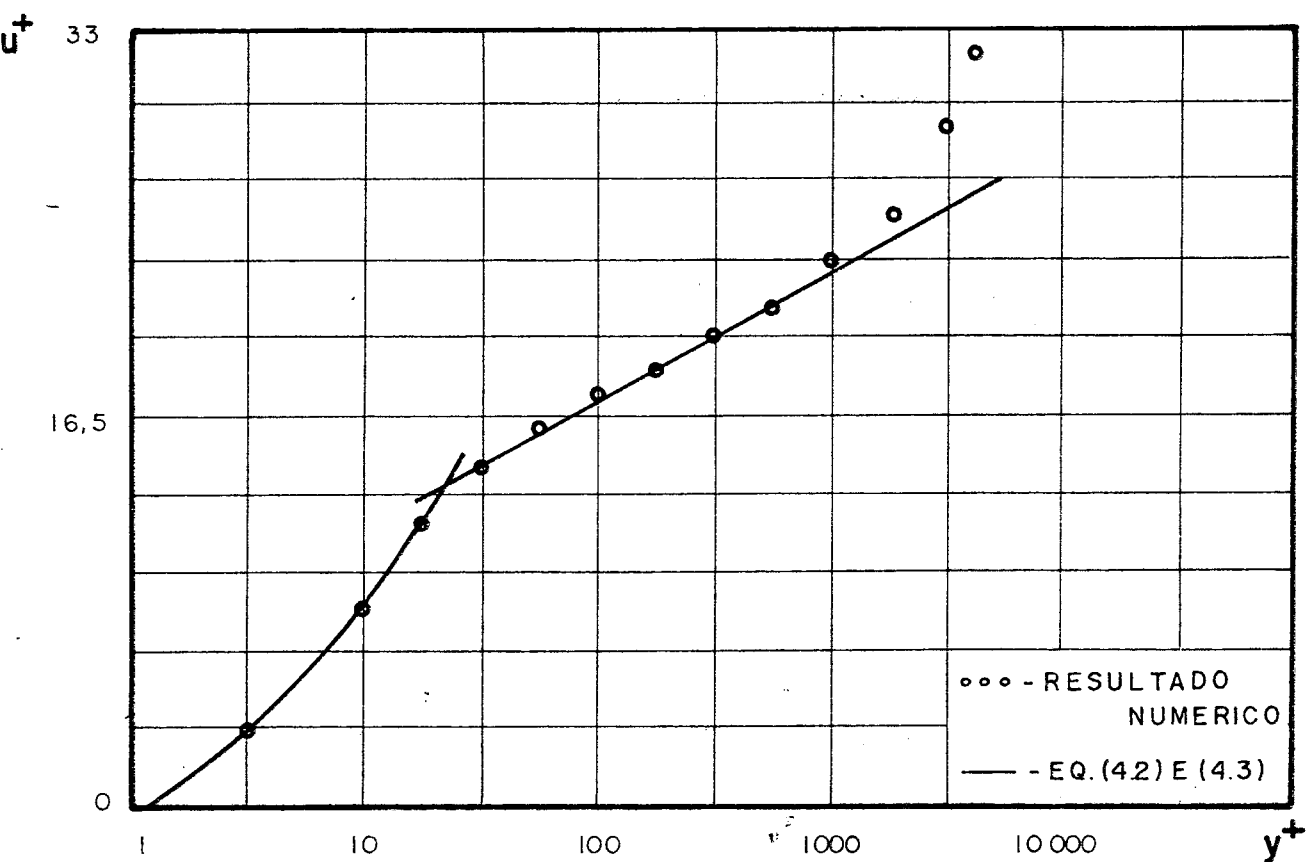


FIGURA 4.8 - PERFIL DE VELOCIDADE u^+ - CASO 1200

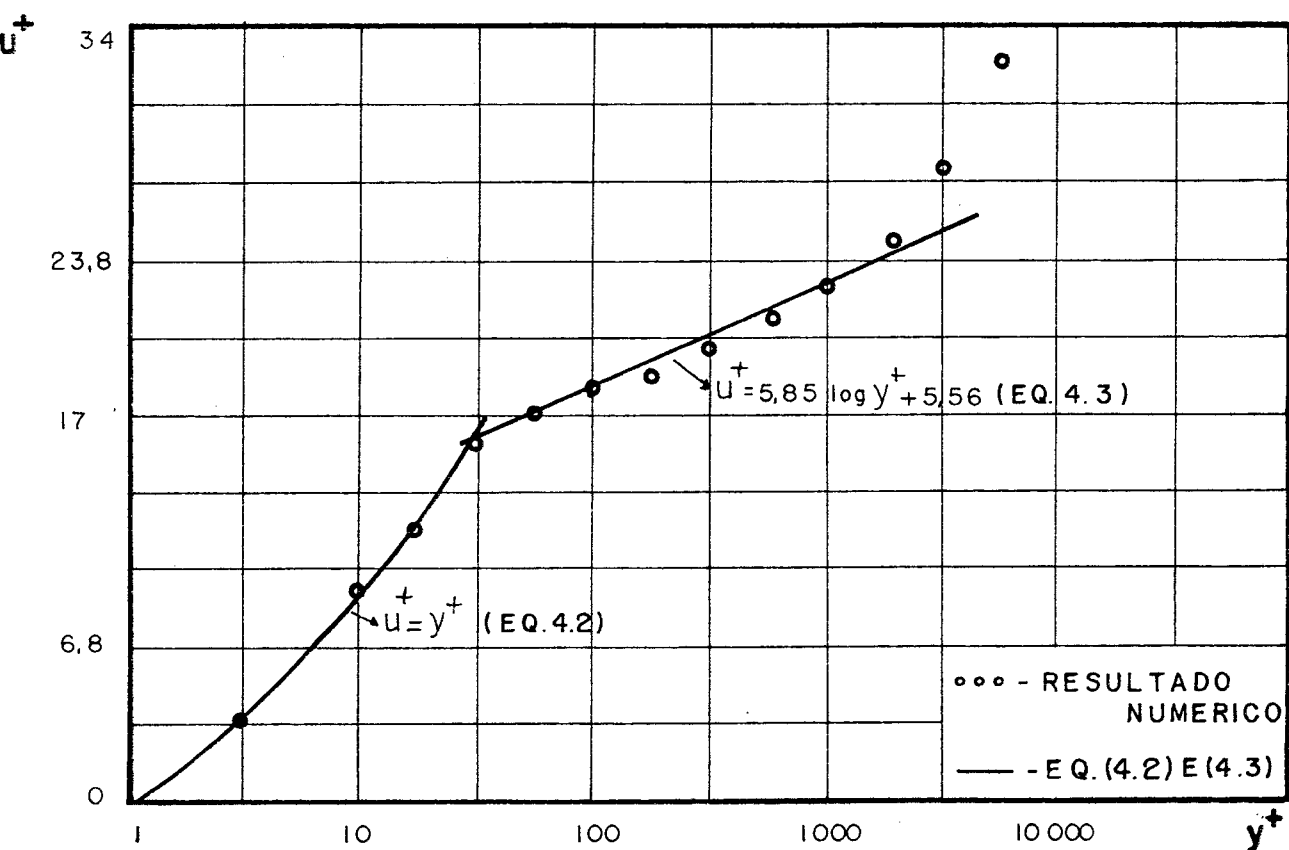


FIGURA 4.9 - PERFIL DE VELOCIDADE u^+ - CASO 1100

equações (4.2) e (4.3) para os casos 1100, 1200 e 1300, cuja divergência está na faixa de 5%, permite serem considerados válidos os perfis obtidos, para $y^+ < 1000$.

Através da análise dos perfis de velocidade u e v , caracteriza-se a aceitação da solução das equações da conservação da massa e da quantidade de movimento.

4.5.2. TEMPERATURA

Da solução do sistema, a equação da energia fornece o comportamento da temperatura ao longo da camada limite, para cada seção do escoamento.

Os resultados do perfil de temperatura obtidos pela solução do sistema, estão plotados nas figuras que seguem.

Na figura 4.10 está plotado o perfil de temperatura para a placa plana, tendo como comparativo valores obtidos no trabalho de Nitsche (16), cuja comparação mostra uma concordância entre a curva obtida pela solução numérica do modelo e os pontos experimentais, tal que a divergência não ultrapassa a 5%.

Nas figuras 4.11 a 4.14 estão plotados os perfis adimensionais de temperatura, θ , para os casos em estudo.

Nas figuras 4.15 a 4.18 estão plotados os perfis adimensionais de temperatura, T^+ , obtidos, segundo Nitsche (16), pela equação,

$$T^+ = \frac{\bar{T} - T_p}{T_p \beta q} \quad (4.4)$$

T x y

$\phi = 32,7 \text{ mm}$

$T_f = 629 \text{ [K]}$

$T_p = 302 \text{ [K]}$

$X = 1,67 \text{ m}$

LEGENDA

— - CALCULADO

▲▲▲ - NITSCHÉ (16)

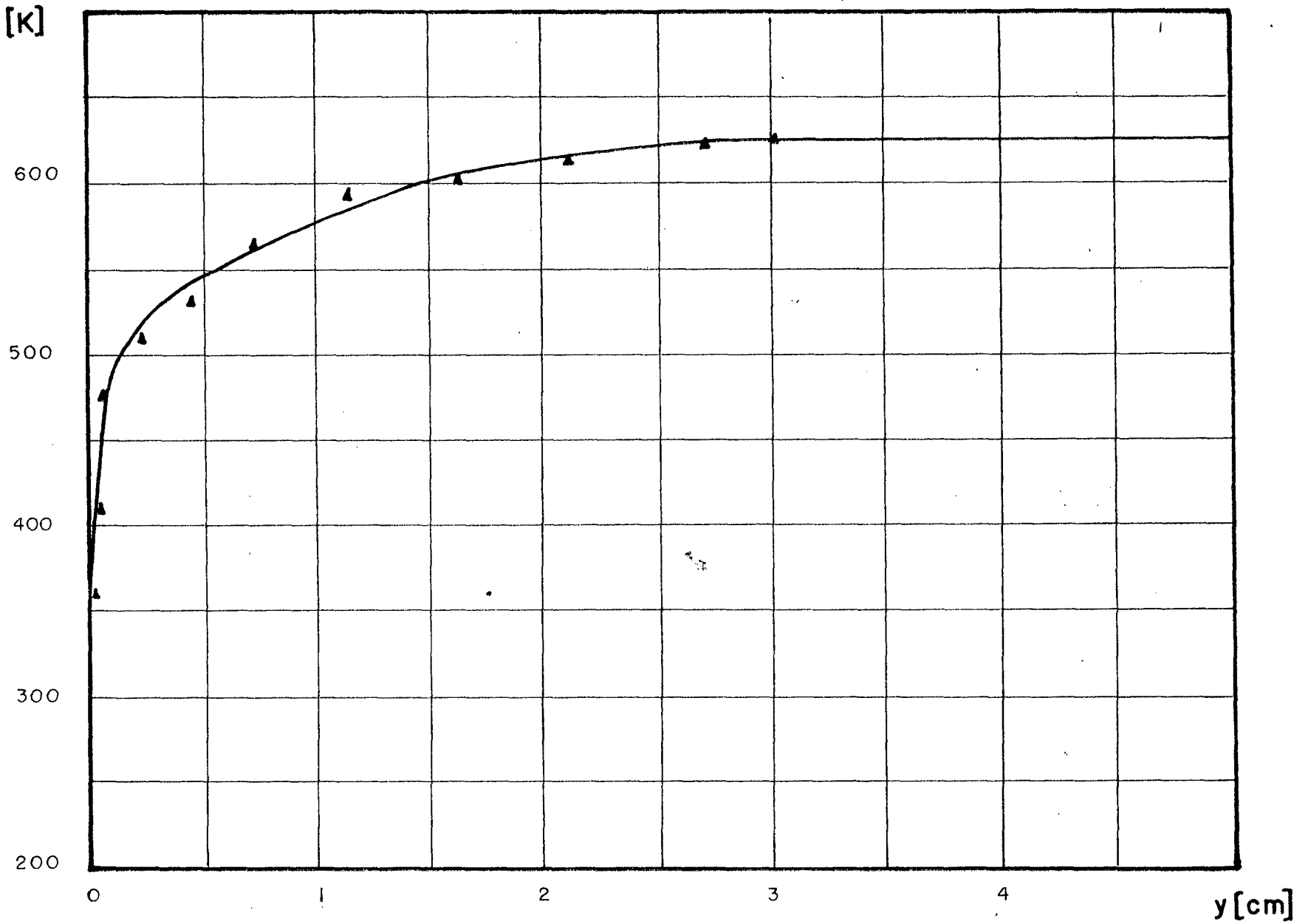


FIGURA 4.10 - DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA NA PLACA PLANA

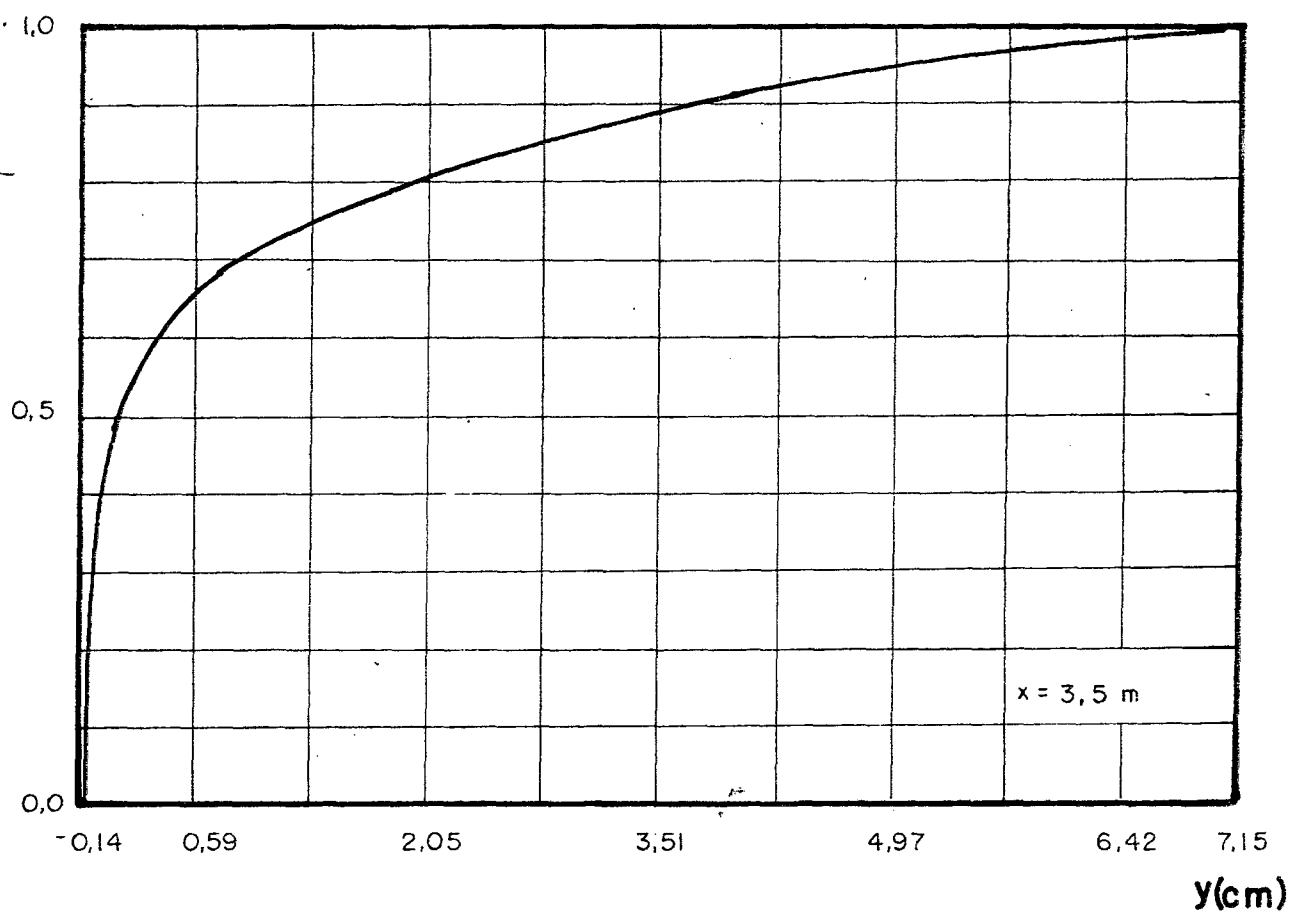


FIGURA 4.11 - PERFIL DE TEMPERATURA - CASO 1400

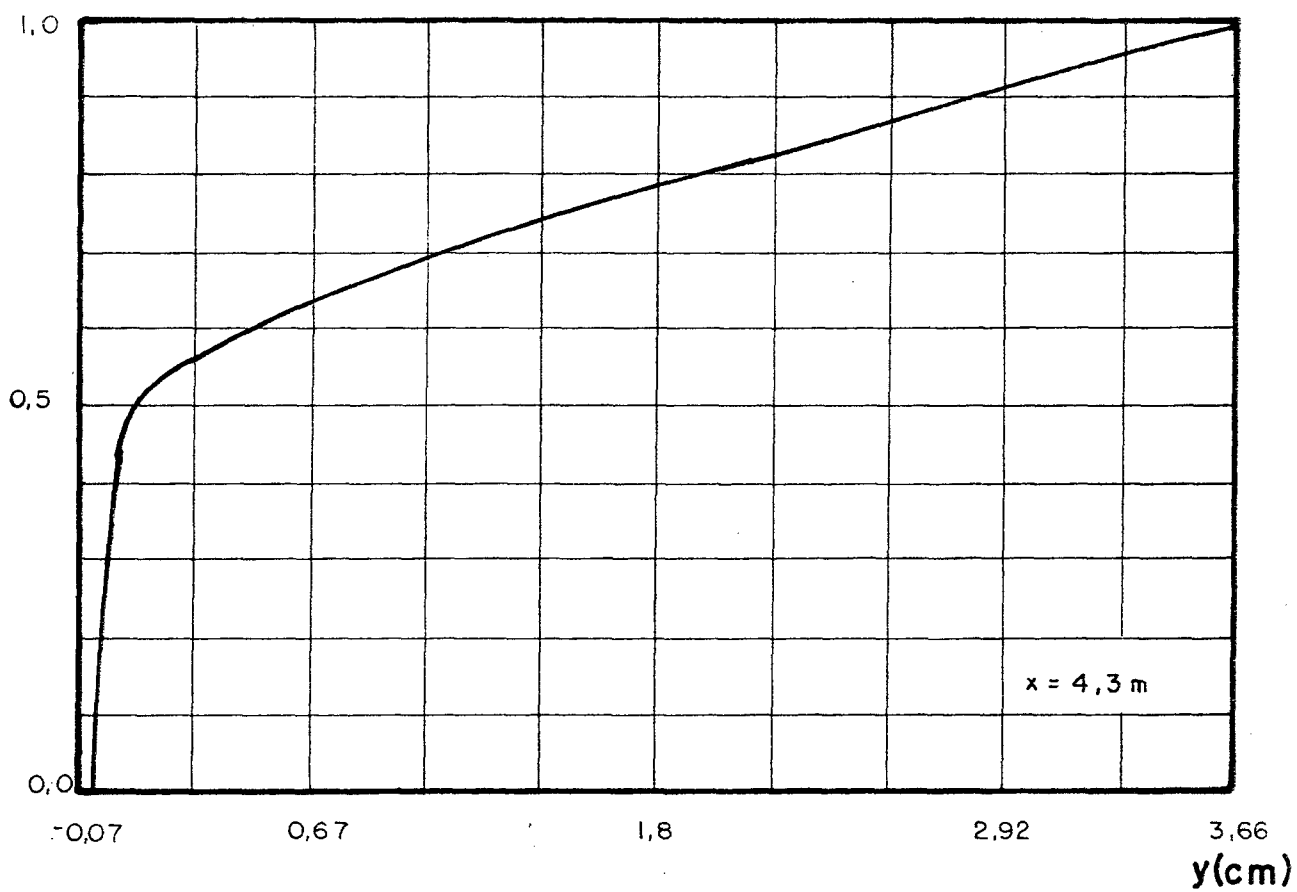


FIGURA 4.12 - PERFIL DE TEMPERATURA - CASO 1300

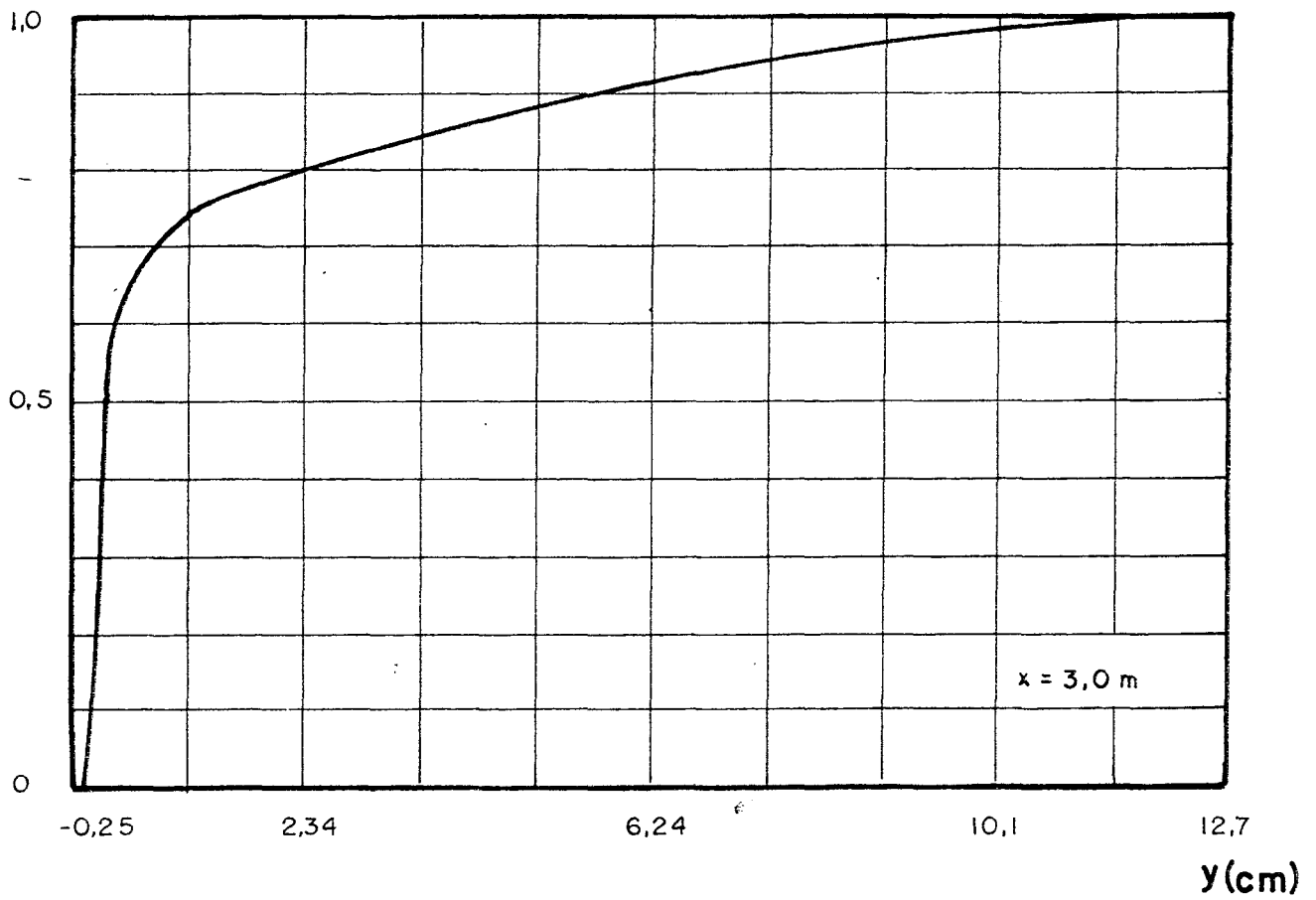


FIGURA 4.13 - PERFIL DE TEMPERATURA - CASO 1200

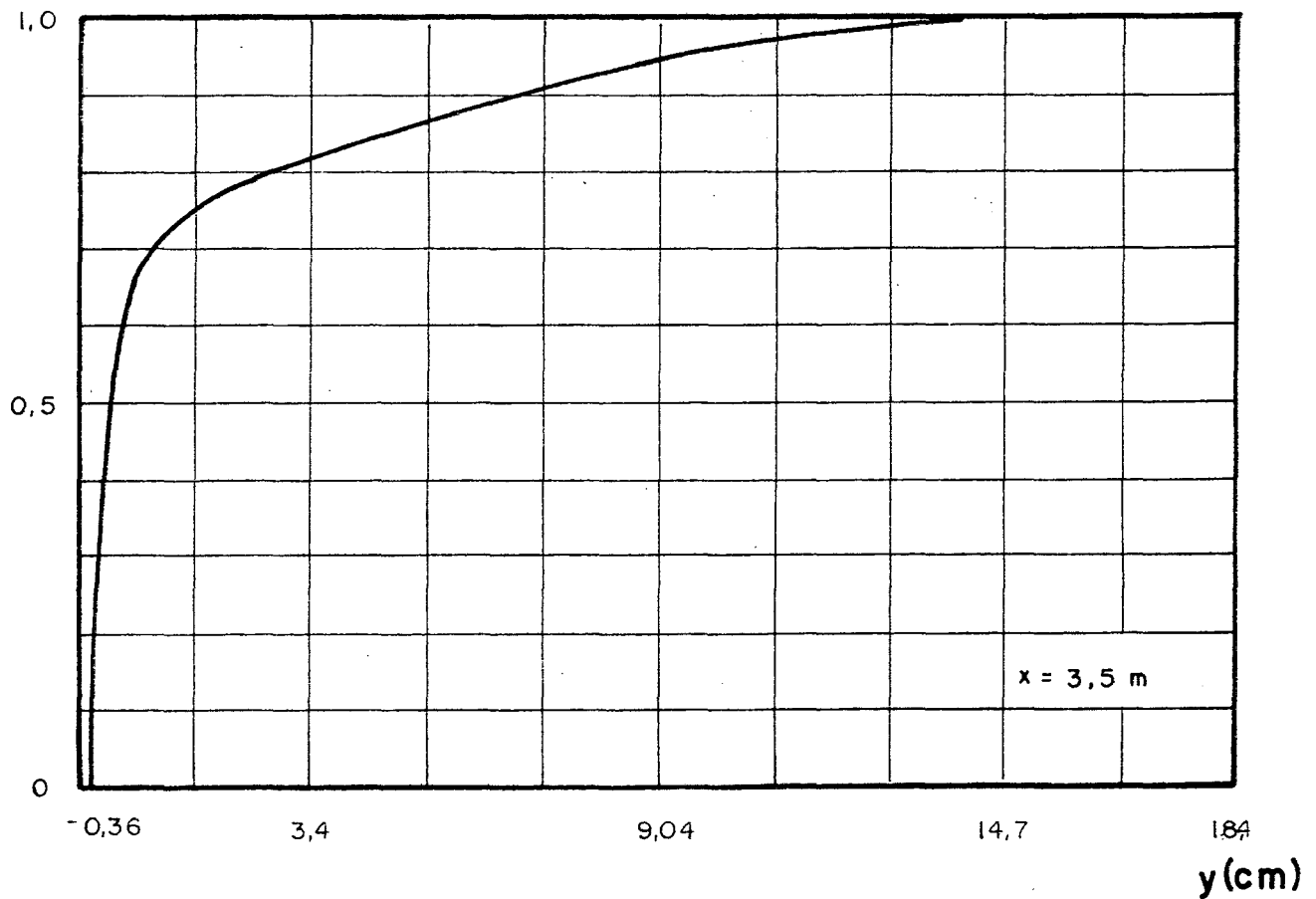


FIGURA 4.14 - PERFIL DE TEMPERATURA - CASO 1100

Nesta equação, βq , fator de fluxo de calor na parede é obtido por,

$$\beta q = \frac{Q_p}{\rho C_p T_{pu_*}} \quad (4.5)$$

Para a placa plana, na figura 4.15, o perfil T^+ é comparado com valores experimentais obtidos por Nitsche (16), onde se observa que o perfil numérico e o perfil experimental tem uma concordância cuja faixa de erro não ultrapassa aos 10%. Como comparativo, a distribuição de T^+ pode ser obtida, segundo Kays (10), pelas equações,

$$T^+ = Pr y^+ \quad \text{para } y^+ < 10 \quad (4.6)$$

$$T^+ = 2,195 \ln y^+ + 13,2 Pr - 5,66 \quad \text{para } y^+ > 10. \quad (4.7)$$

Pode se observar que os perfis numérico, experimental e das equações propostas em Kays (10), na figura 4.15, estão concordantes entre si. Assim, são usadas estas equações como comparativos nos casos 1100, 1200 e 1300, nos quais se observa que o erro está na faixa de no máximo 10%, para $y^+ < 1000$.

Sendo considerados aceitáveis os perfis de temperatura adimensional T^+ , também são considerados aceitos os perfis de temperatura θ plotados em 4.11 a 4.14.

Na figura 4.19 está plotado o perfil de temperatura θ , para a placa plana, com temperatura constante na parede, para 4 seções diferentes ao longo do escoamento. Nesta figura, o ângulo α representa a derivada da temperatura em relação a η , junto à parede, para cada seção de fluxo, onde pode se observar que

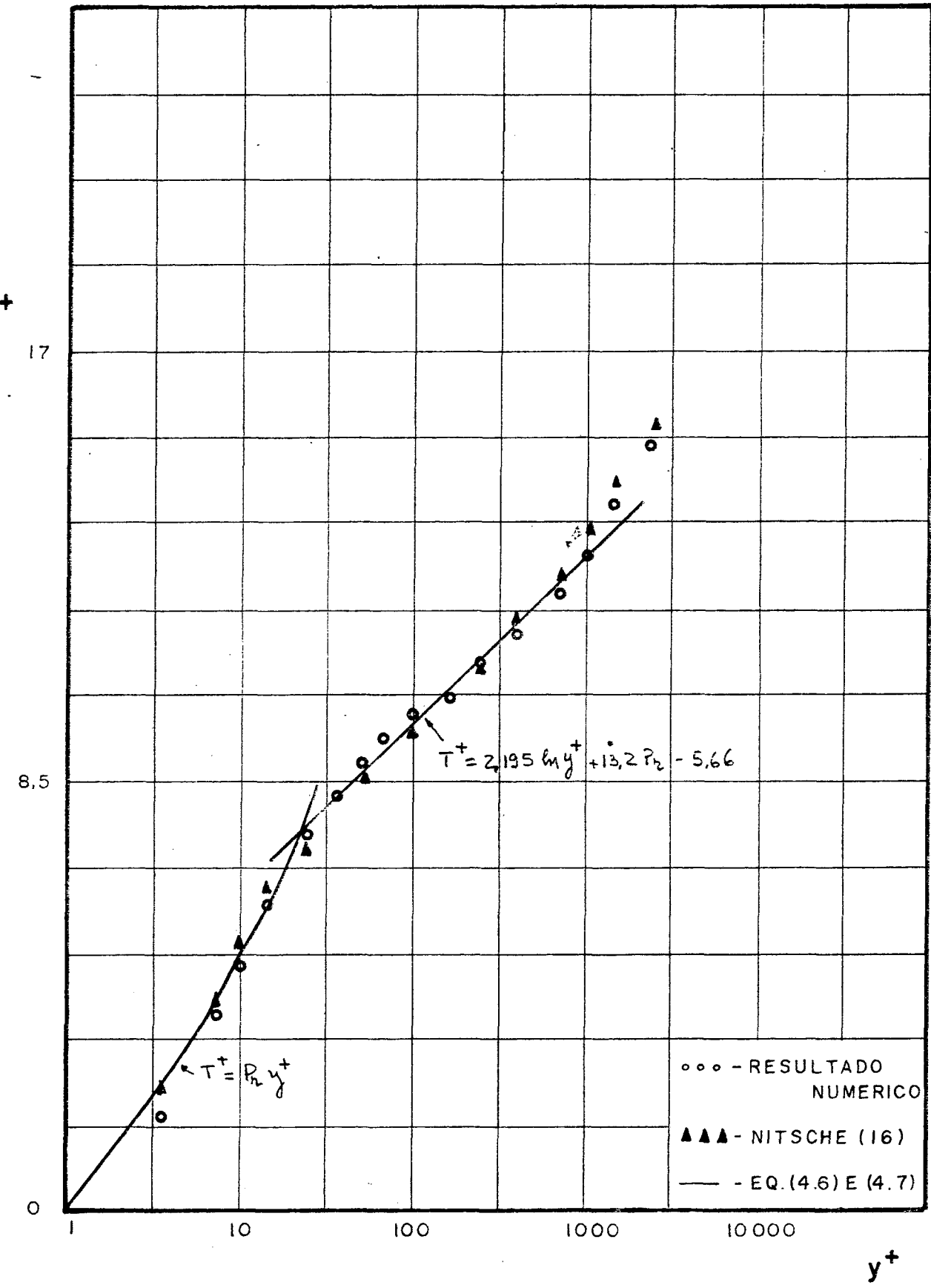


FIGURA 4.15 - PERFIL DE TEMPERATURA T^+
CASO 1400

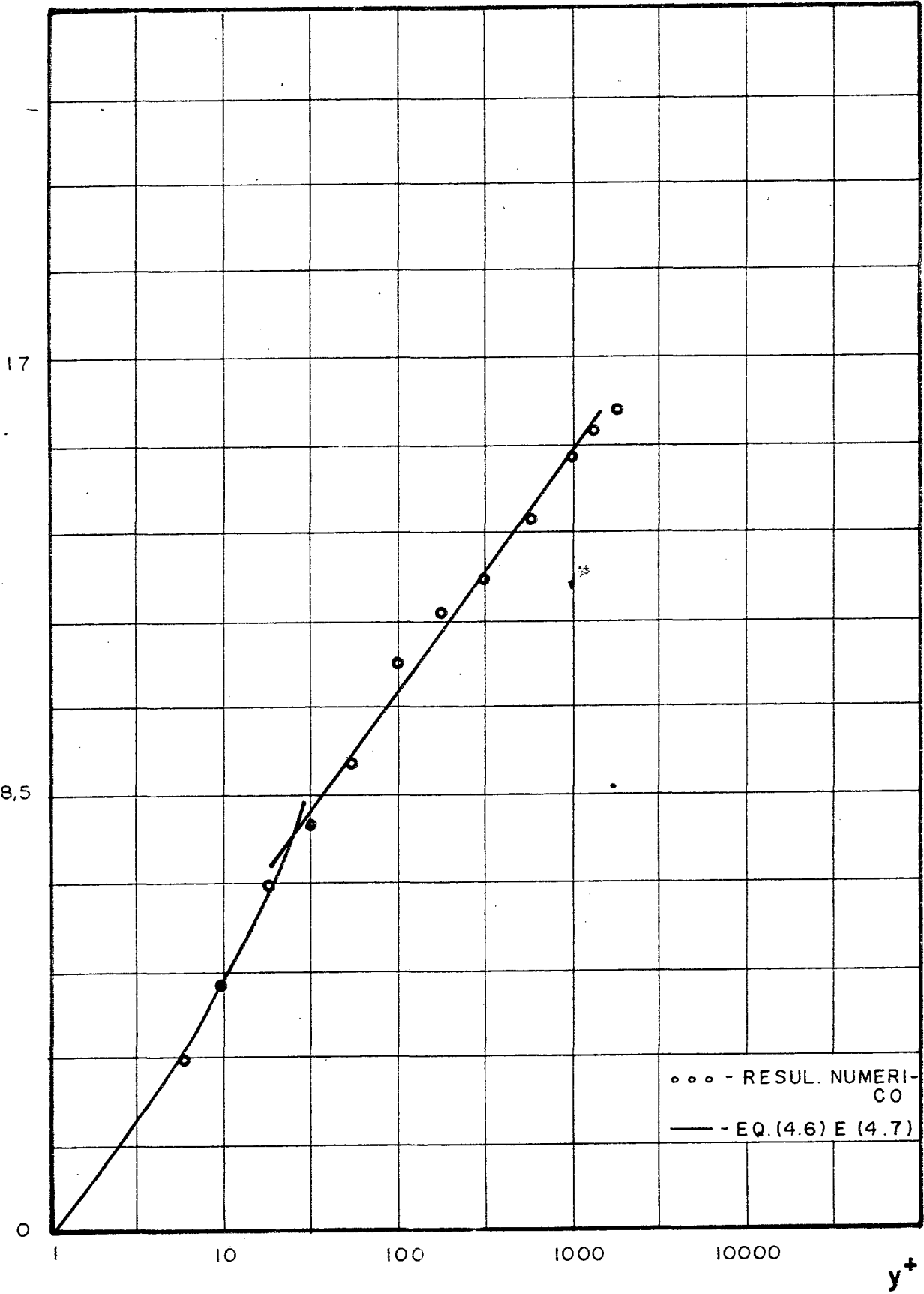


FIGURA 4.16 - PERFIL DE TEMPERATURA T^+
CASO 1300

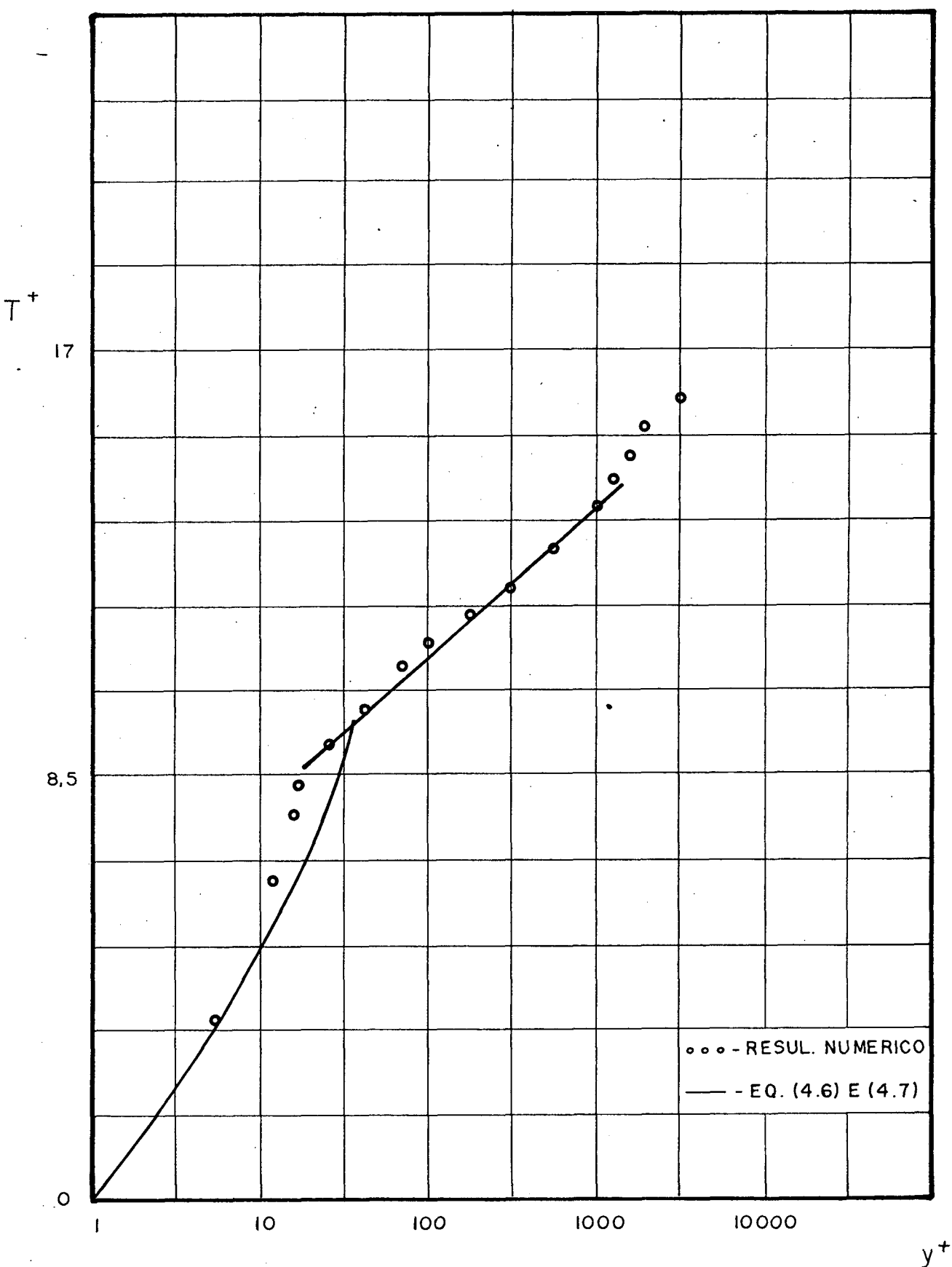


FIGURA 4.17 - PERFIL DE TEMPERATURA T^+
CASO 1200

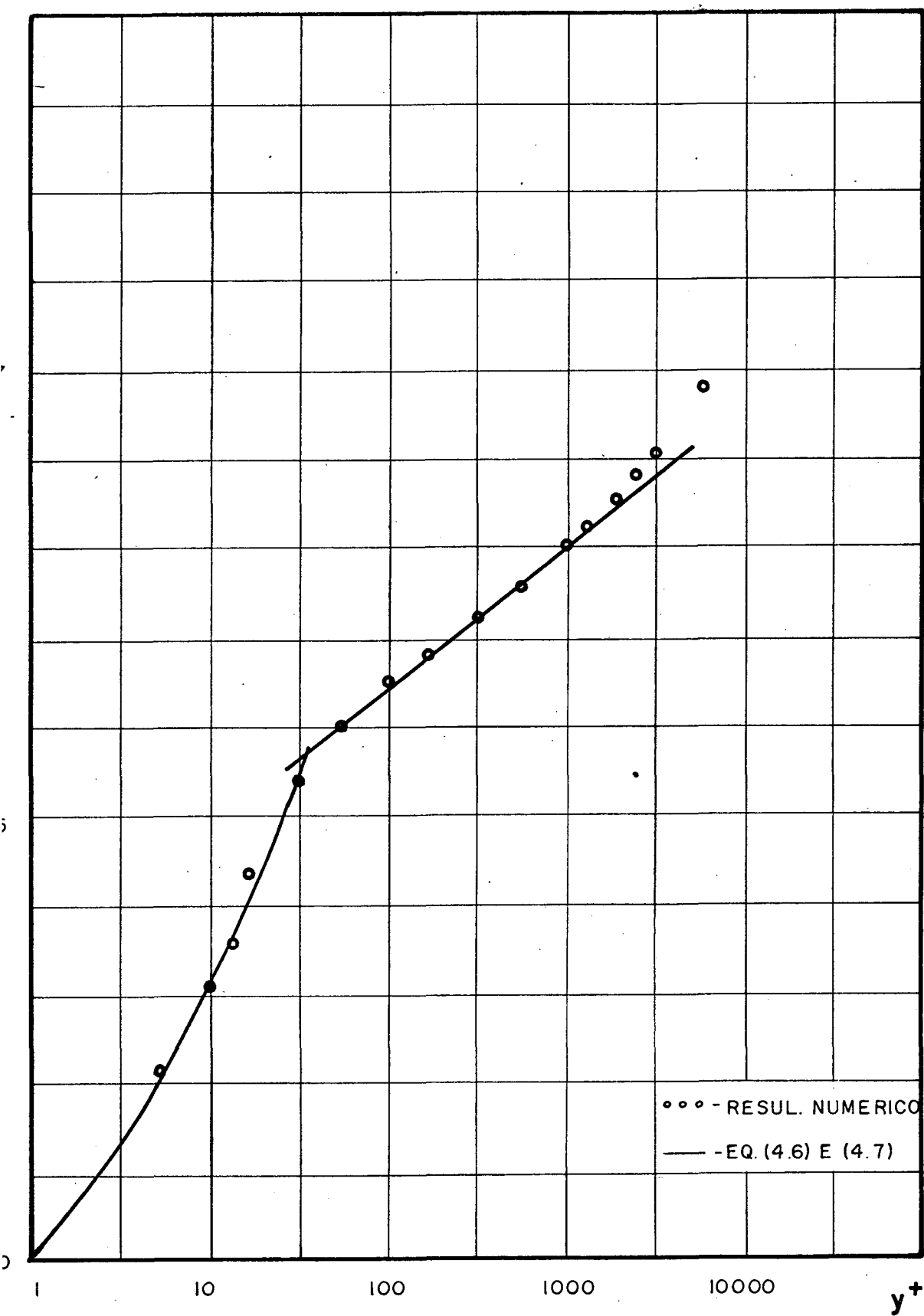


FIGURA 4.18 - PERFIL DE TEMPERATURA T^+

CASO 1100

ao se percorrer o escoamento, o fluxo de calor entre a superfície e o fluido tende a decrescer. Isto ocorre pelo transporte de energia para a região próxima a parede, que acarreta um aumento do potencial junto à parede e a consequente queda no diferencial de temperatura existente, o que leva a um menor fluxo de calor entre a parede e o fluido.

Na figura 4.20 estão plotados os perfis de temperatura θ , para os escoamentos sujeitos a gradientes de pressão adverso, favorável e nulo, numa mesma seção de fluxo, como comparativo da influência do gradiente de pressão no perfil de temperatura. Pode se observar que o escoamento com gradiente de pressão favorável, caso 1300, causa um transporte de energia para a região próxima à parede com maior rapidez que a placa plana e está, com maior rapidez que o escoamento com gradiente de pressão adverso. Sendo o perfil de temperatura calculado considerado adequado ao fato físico, ou seja, ao experimento, a solução da equação da energia está satisfeita.

Além disso, na figura 4.21 está plotado o comportamento da temperatura quando o fluxo de calor na parede é constante, onde pode se observar que o ângulo α permanece constante quando a temperatura na parede cresce ao longo do escoamento.

4.5.3. ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Da solução das equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia cinética turbulenta, obtém-se a distribuição da energia cinética turbulenta, \bar{q} , em cada seção ao longo do escoamento.

θ

LEGENDA

- - $x_1 = 0,68\text{ m}$
- - - - $x_2 = 1,10\text{ m}$
- · - · - $x_3 = 1,96\text{ m}$
- · · · - $x_4 = 3,50\text{ m}$

$T_p = 302\text{ K (CONST.)}$

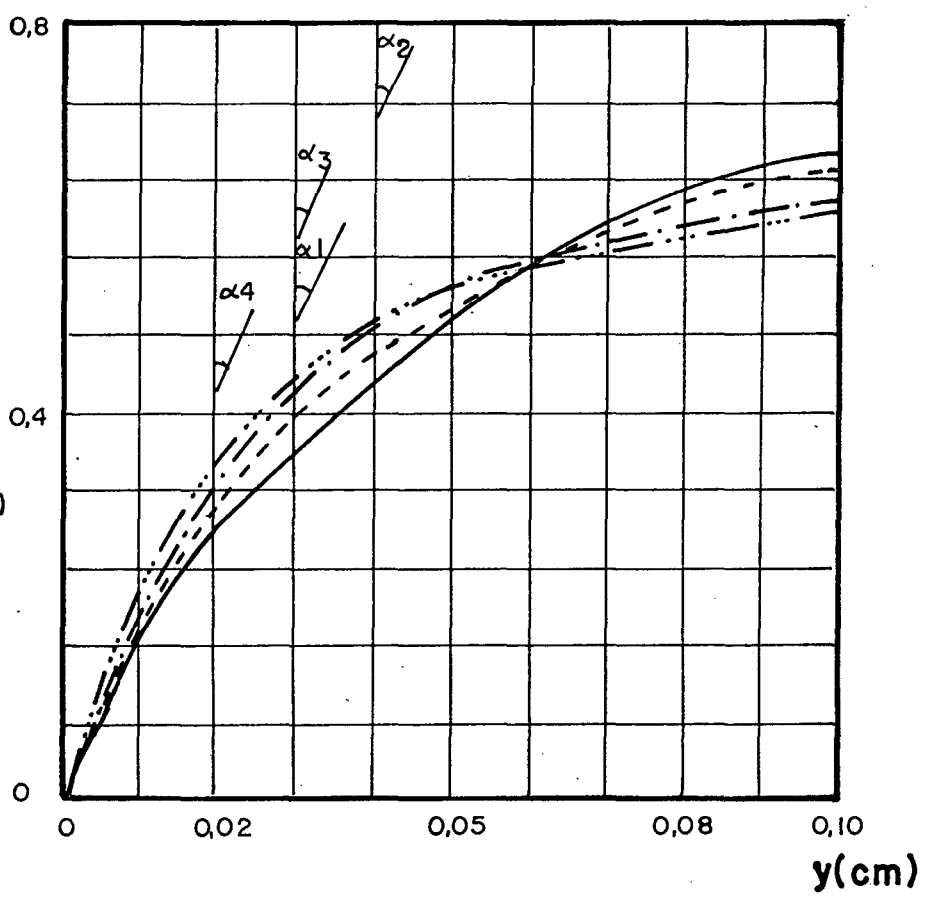
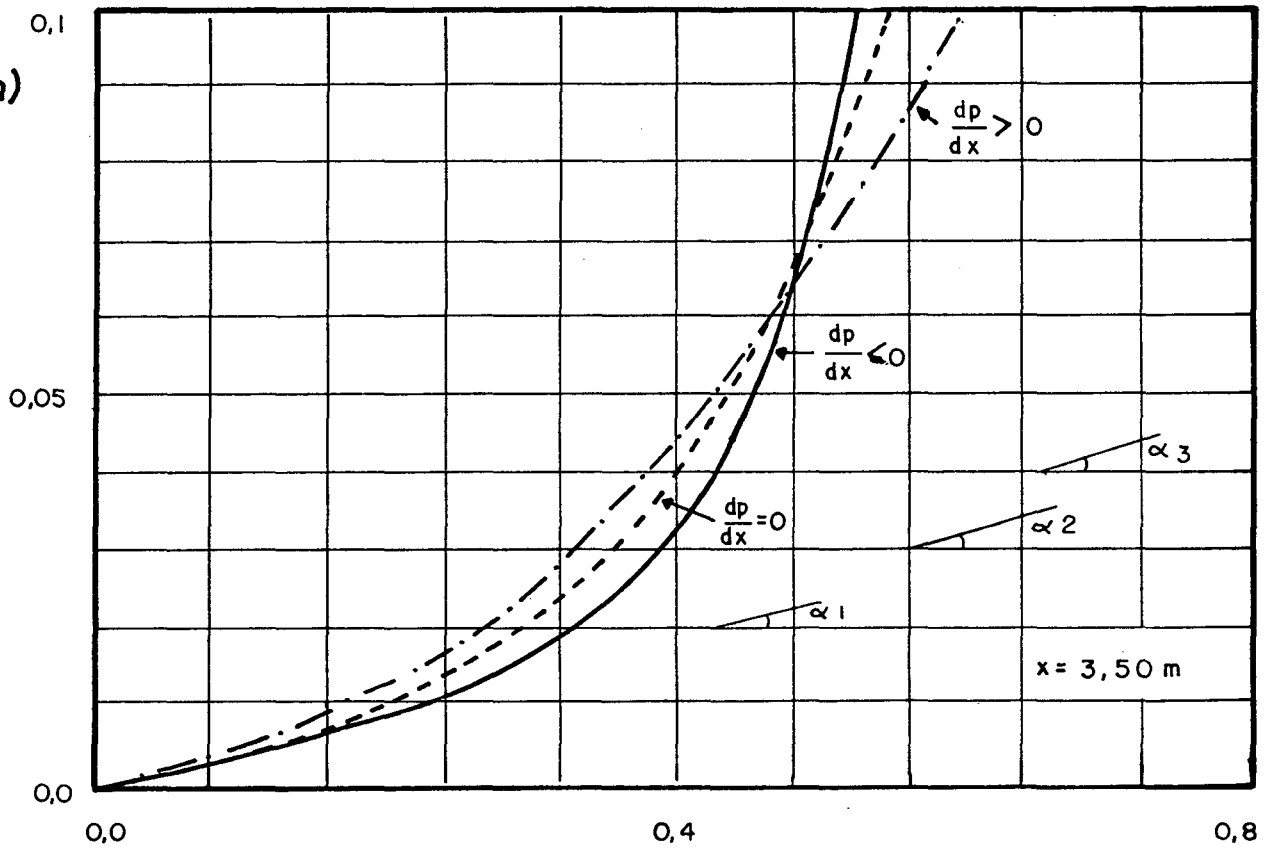


FIGURA 4.19 - PERFIL DE TEMPERATURA

m)



θ

FIGURA 4.20 - PERFIL DE TEMPERATURA EM FUNÇÃO DE p(x)

y/δ

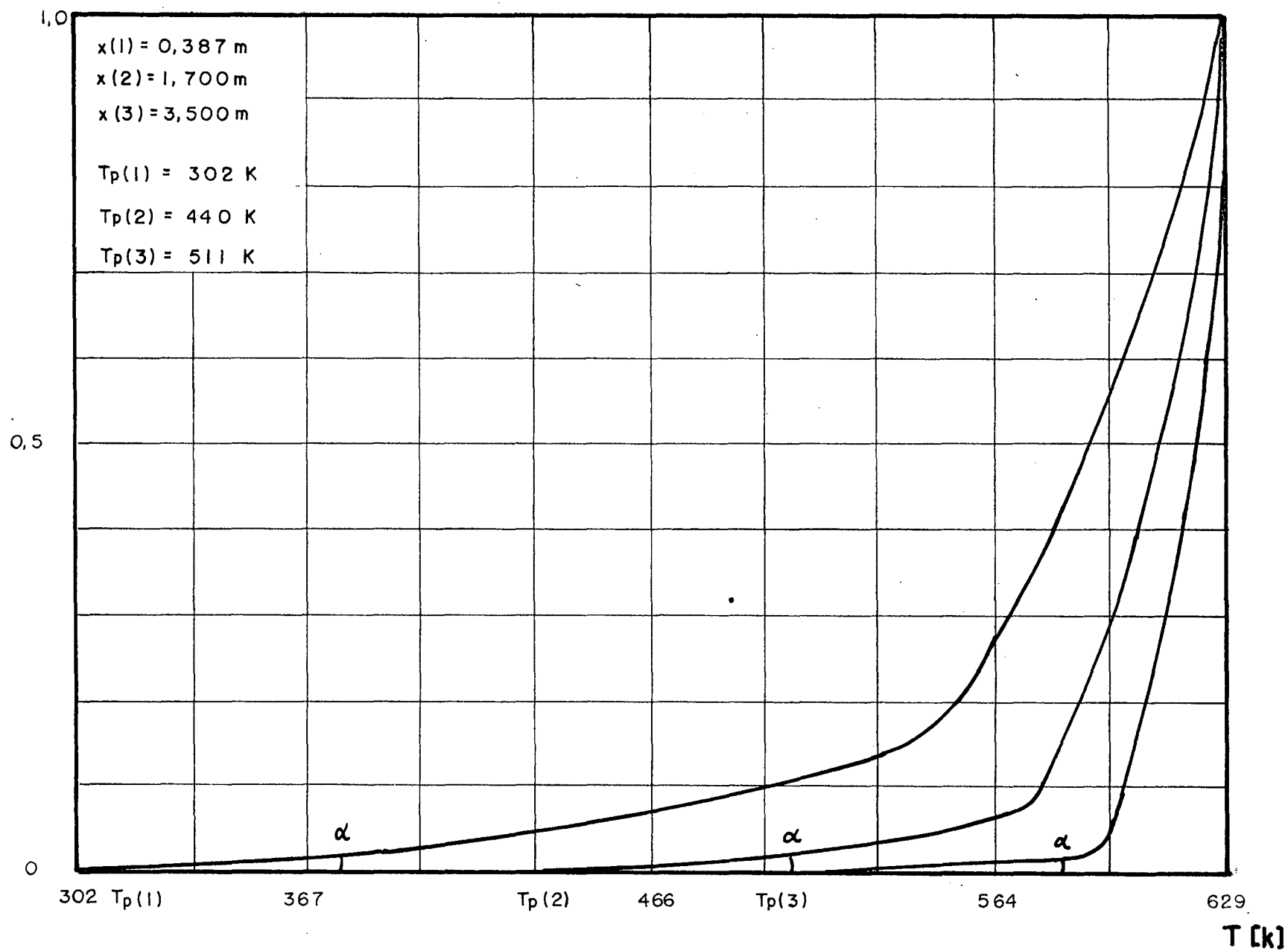


FIGURA 4.21 - PERFIL DE TEMPERATURA - CASO 1400

Estes perfis estão plotados nas figuras 4.22 a 4.25.

Conforme a figura 4.22 se observa que, para o escoamento com gradiente de pressão nulo, a energia cinética turbulenta tende a se concentrar junto a parede, onde ocorrem os maiores gradientes de velocidade. Tal fato também é verificado por Klebanoff (34), conforme a figura 4.26 onde estão plotados resultados experimentais da energia cinética turbulenta.

Conforme a figura 4.23, para o caso 1300, escoamento com gradiente de pressão favorável, comportamento semelhante ao do escoamento com gradiente de pressão nulo é verificado para o perfil da energia cinética turbulenta.

Conforme a figura 4.24, para o caso 1200 e a figura 4.25, para o caso 1100, escoamentos com gradiente de pressão adverso, a energia cinética turbulenta tende a ter um ponto de máximo na região entre $0,2 < y/\delta < 0,4$, máximo este que se afasta da parede com o avanço ao longo do escoamento. Isto se deve a tensão total na parede tender a diminuir com a aproximação do ponto de separação ou seja, a tendência de deslocamento do escoamento com gradiente de pressão adverso. Este comportamento também foi encontrado por Rotta (20), conforme a figura 4.27.

4.5.4. TAXA DE DISSIPACÃO

Da solução das equações da conservação da massa, quantidade de movimento, energia cinética turbulenta e taxa de dissipação, em cada seção de fluxo ao longo do escoamento, obtém-se o perfil da taxa de dissipação, $\bar{\nu}$, na camada limite turbulenta.

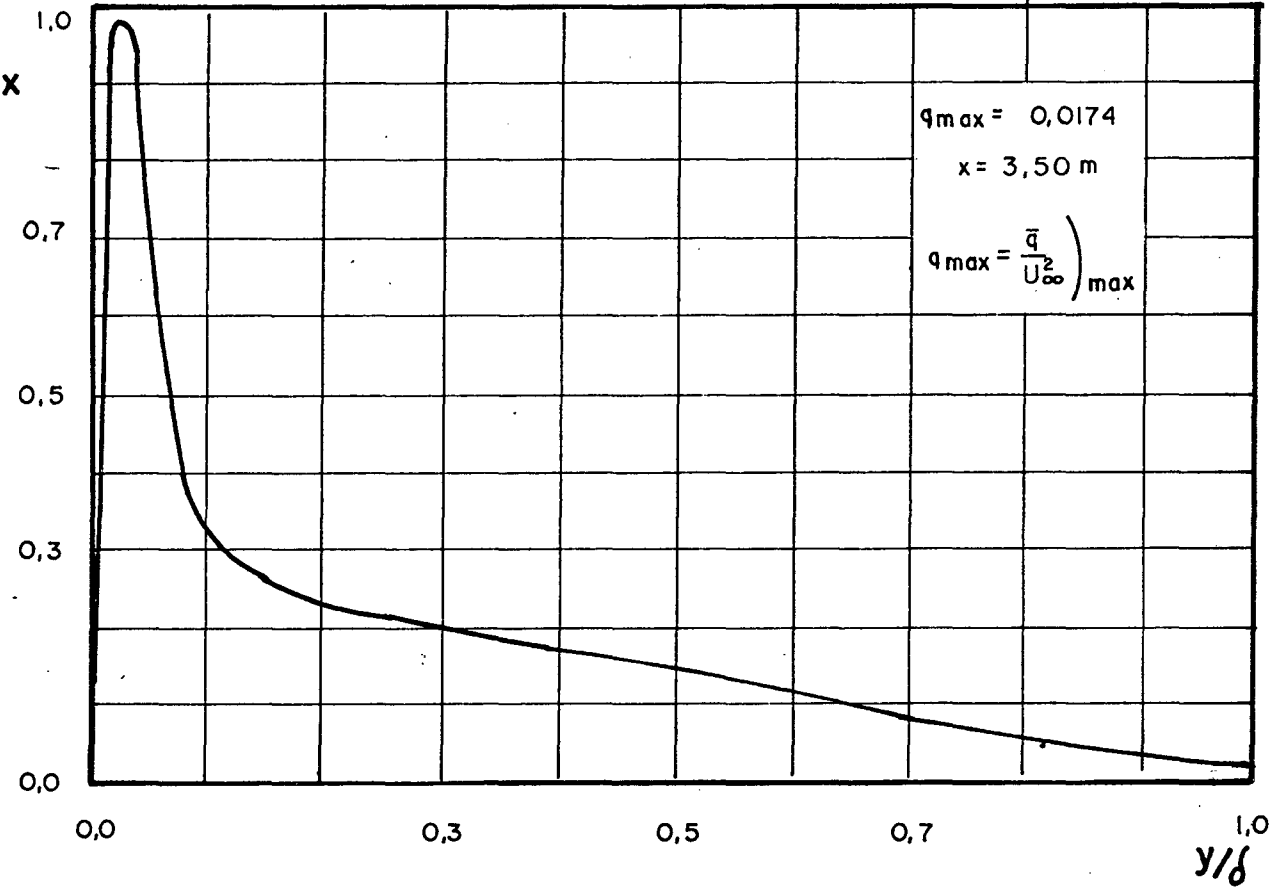


FIGURA 4.22 - PERFIL DA ENERGIA CINETICA
CASO 1400

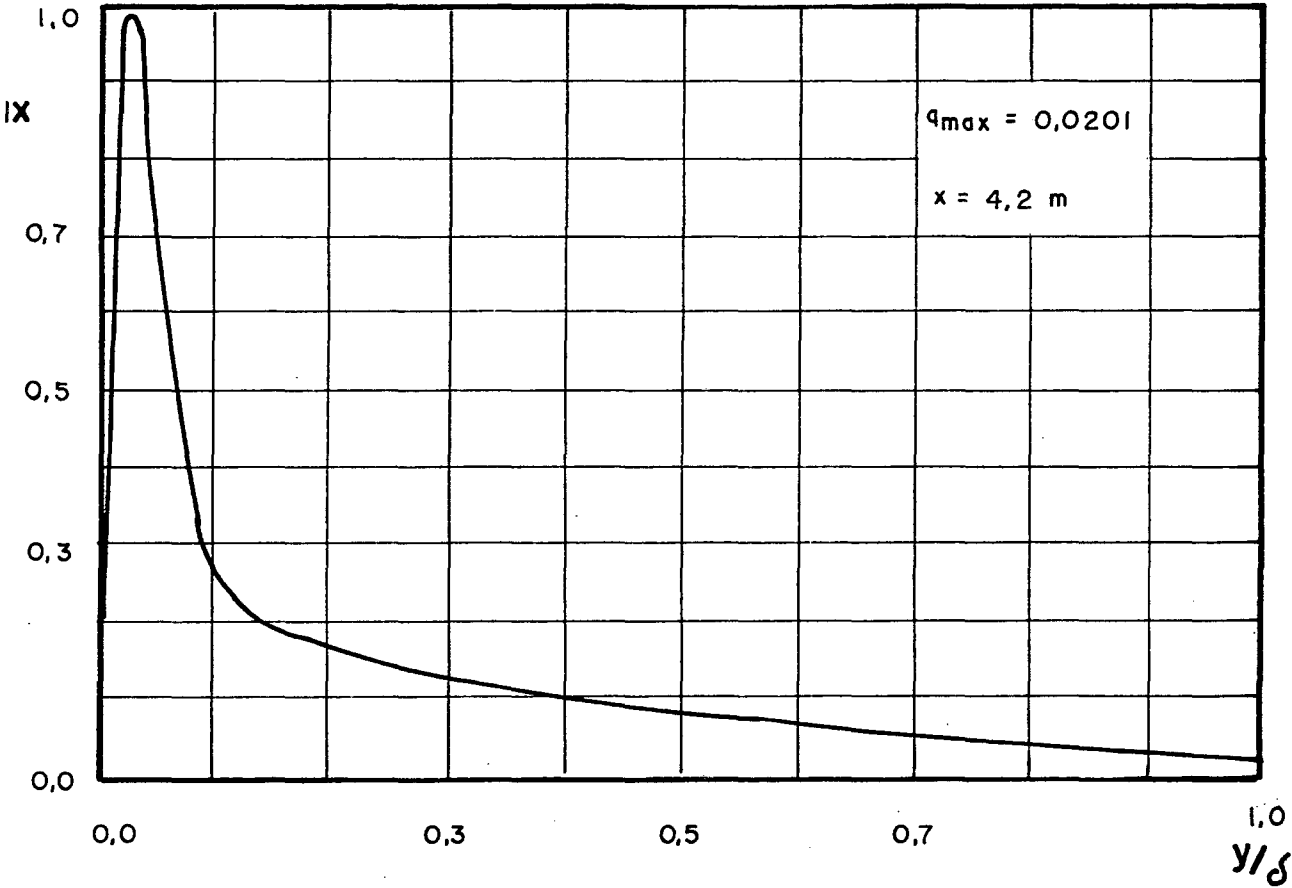


FIGURA 4.23 - PERFIL DA ENERGIA CINETICA
CASO 1300

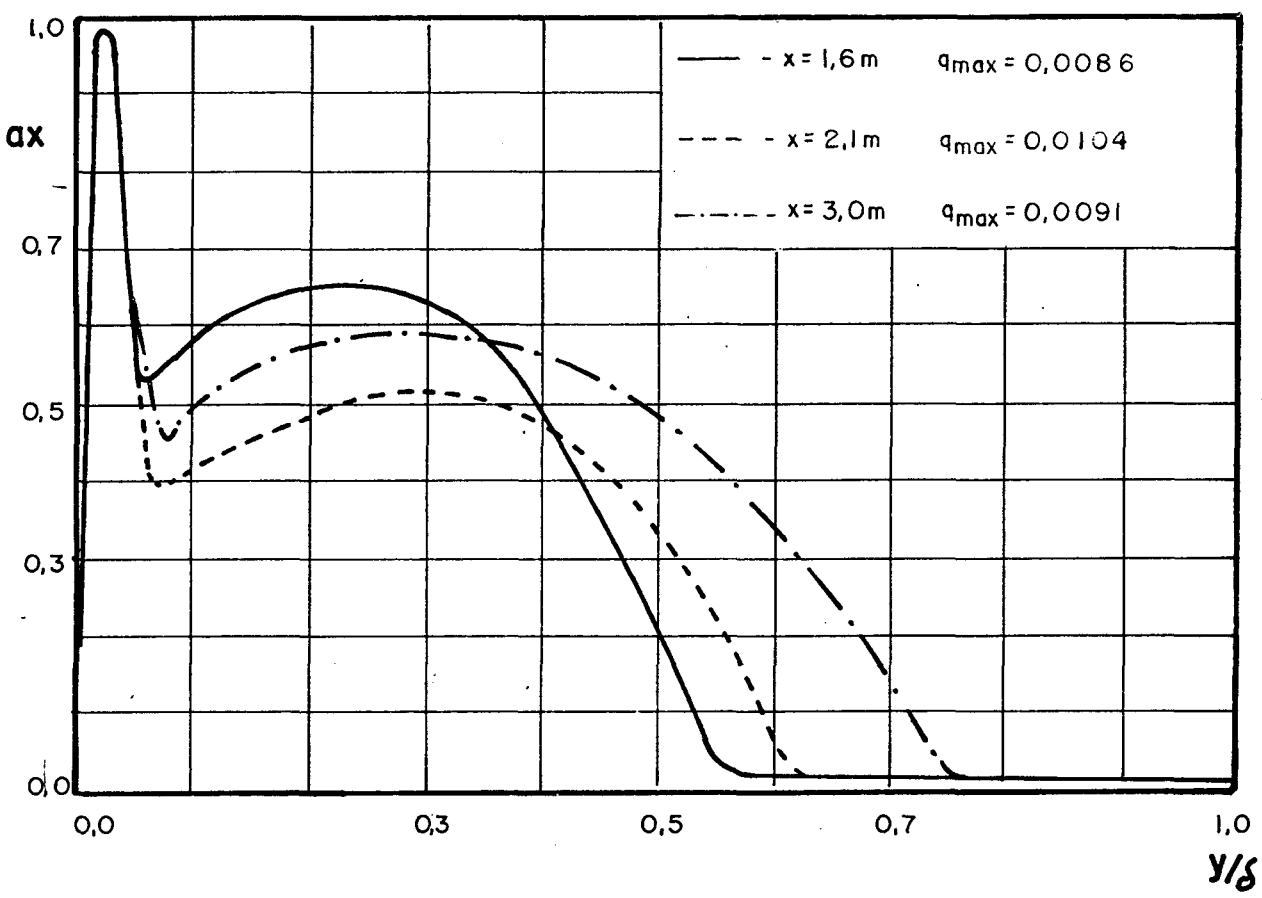


FIGURA 4.24 - PERFIL DA ENERGIA CINETICA
CASO 1200

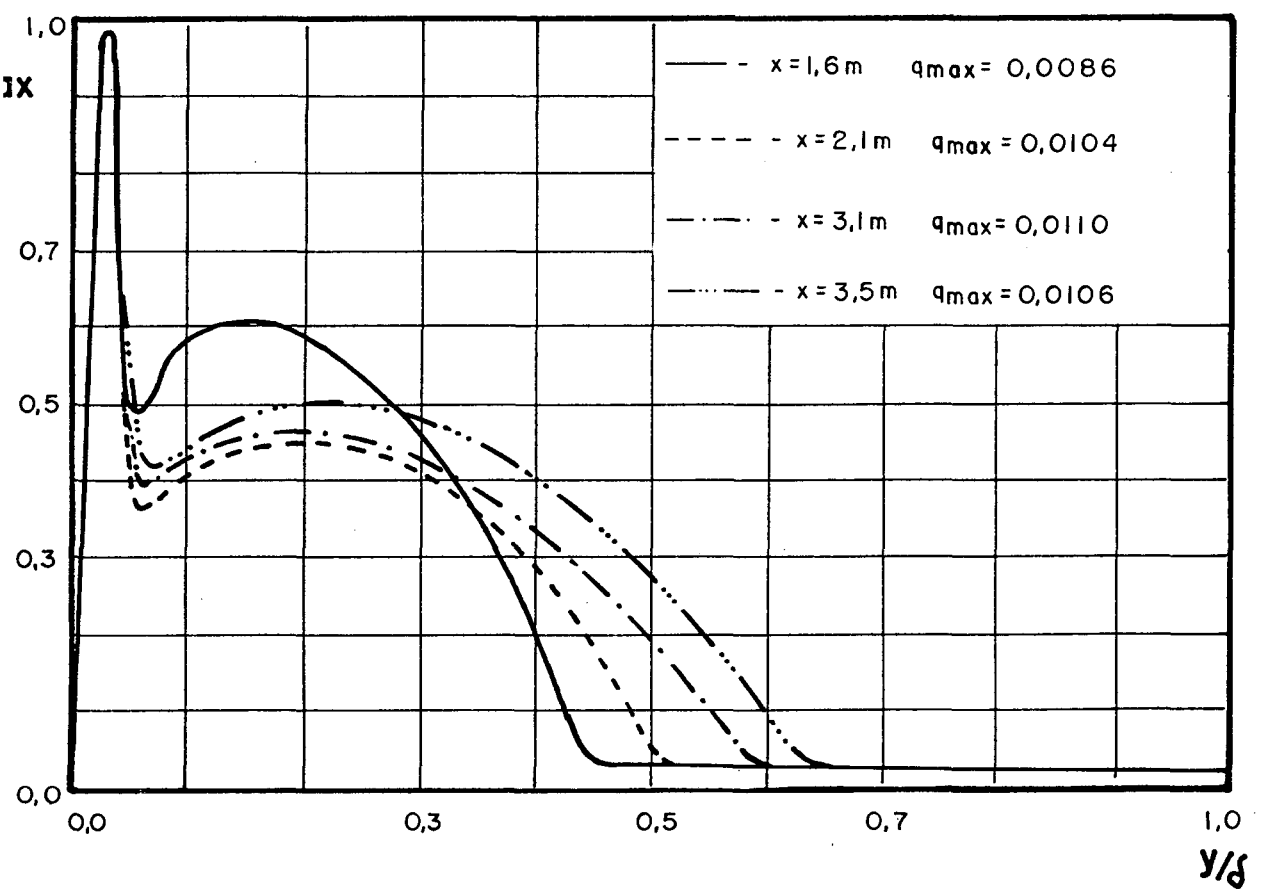


FIGURA 4.25 - PERFIL DA ENERGIA CINETICA
CASO 1100

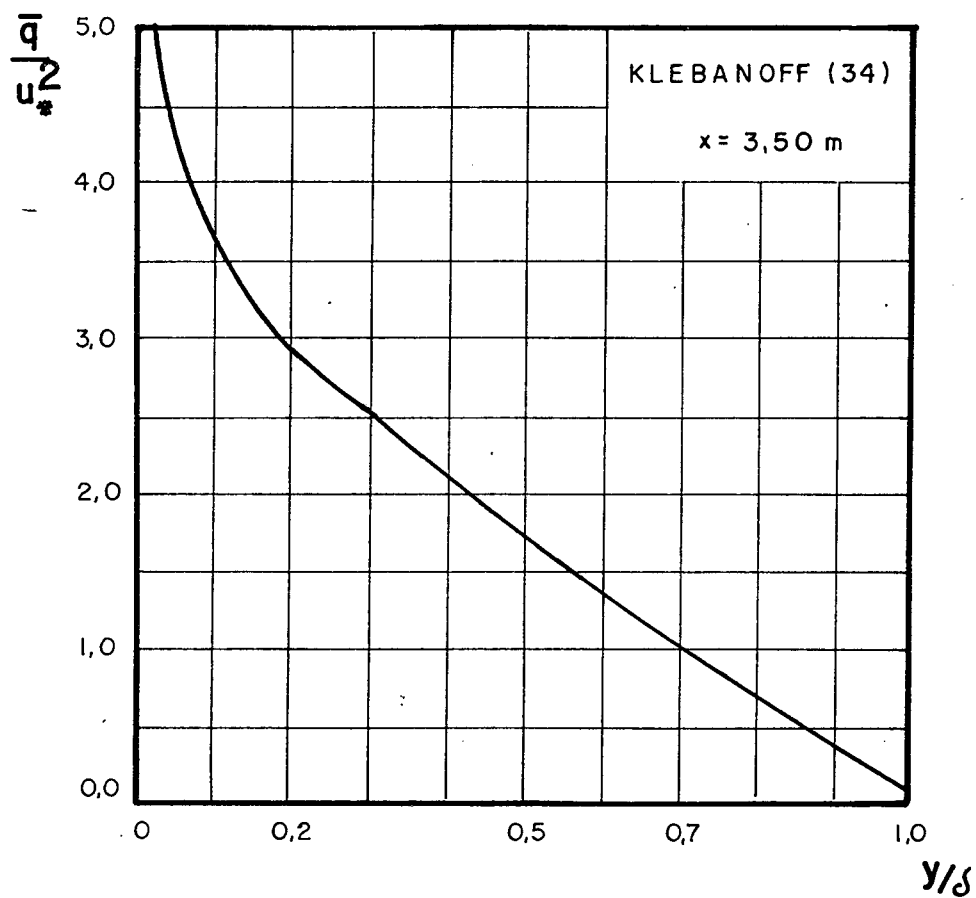


FIGURA 4.26 - CASO 1400 - PLACA PLANA

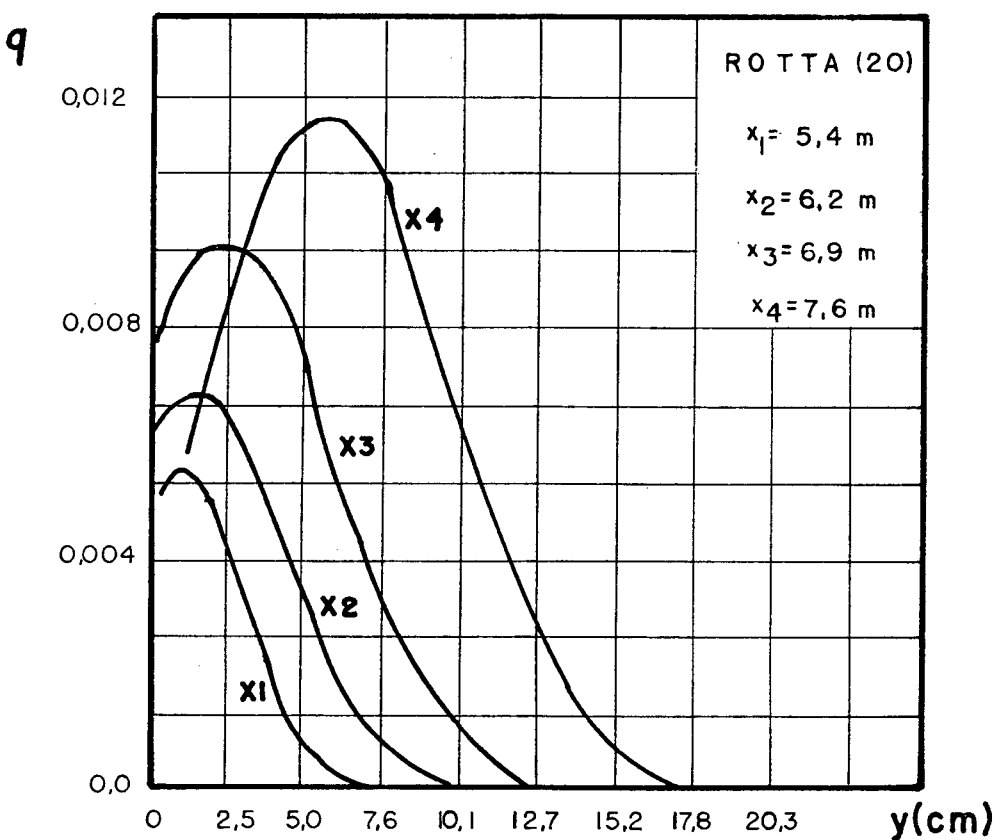


FIGURA 4.27 - GRADIENTE DE PRESSÃO ADVERSO

Na figura 4.28 está plotado o perfil da taxa de dissipação para o escoamento com gradiente de pressão nulo e com temperatura na parede constante, onde se observa que a maior parte da dissipação ocorre junto a parede, onde é gerada a energia cinética turbulenta, conforme é visto na figura 4.22.

Pode ser observado que a região próxima a parede, $y < \delta/10$, contribui com a quase totalidade da dissipação da energia cinética gerada pela turbulência do escoamento, fato este atribuído aos grandes gradientes de velocidade existentes nesta região, a camada limite, do escoamento.

Nas figuras 4.29 a 4.31 estão plotados os perfis da taxa de dissipação para os casos 1100, 1200 e 1300, escoamentos com gradientes de pressão variável, onde se verifica o mesmo comportamento verificado no escoamento com gradiente de pressão nulo, ou seja, na região próxima a parede $y < \delta/10$, ocorre a quase totalidade da dissipação.

Este fato pode ser comprovado na análise do balanço realizado pela equação (2.98), conforme pode ser visto na seção 4.9.2.

4.6. COMPORTAMENTO DA VISCOSIDADE TURBULENTA E DO COEFICIENTE DE DIFUSÃO TÉRMICA TURBULENTA

Na solução do sistema de equações proposto, 2 variáveis são modeladas em função de valores médios do escoamento, as quais são ϵ_m e ϵ_h , conforme as equações (2.79), (2.81) e (2.82).

Estas variáveis tem decidida influência na solução do sistema, visto que constam das equações (2.95), (2.97), (2.98) e (2.99). Portanto, para se obter uma razoável solução do proble-

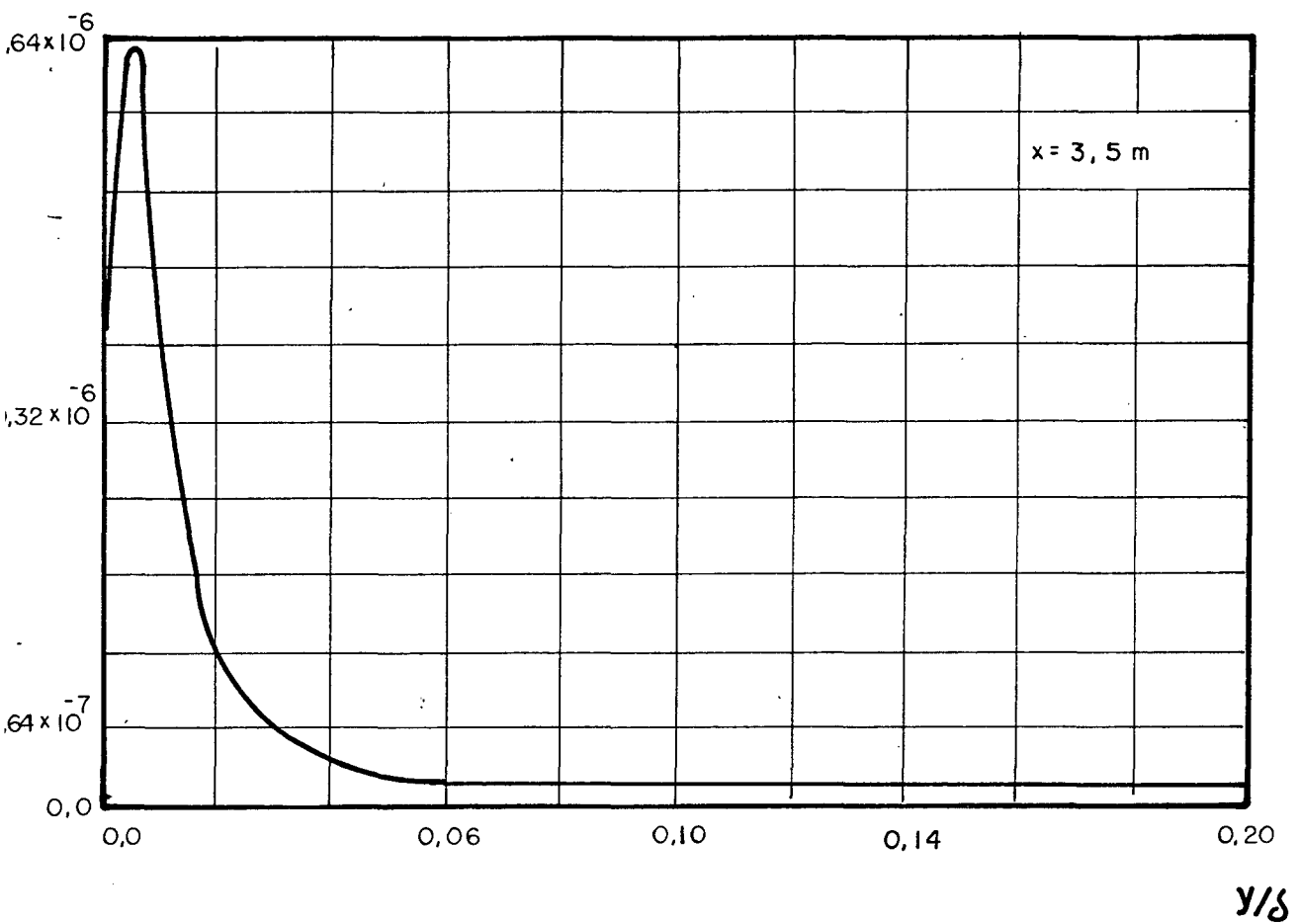


FIGURA 4.28 - PERFIL DA TAXA DE DISSIPACÃO - CASO 1400

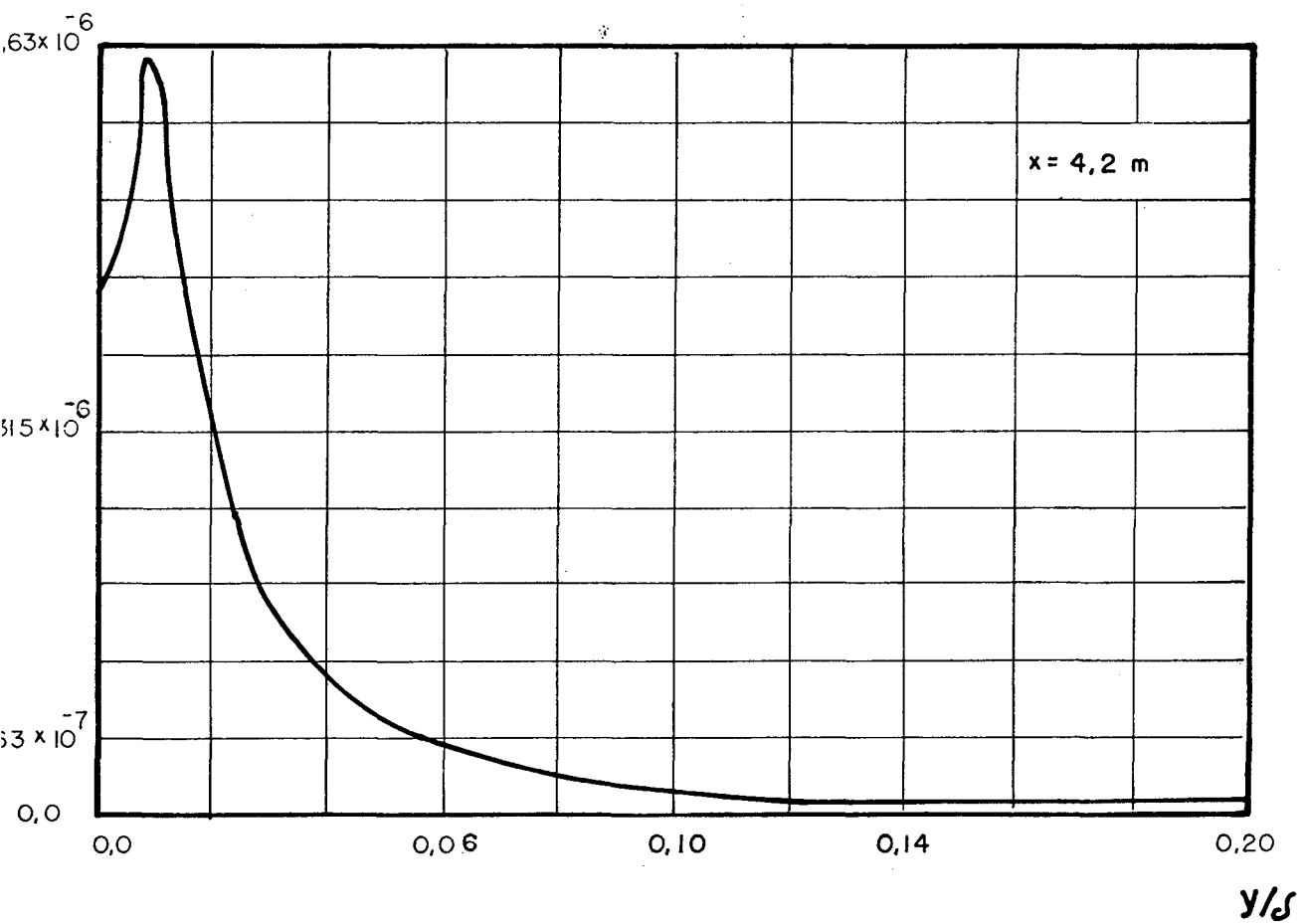


FIGURA 4.29 - PERFIL DA TAXA DE DISSIPACÃO - CASO 1300

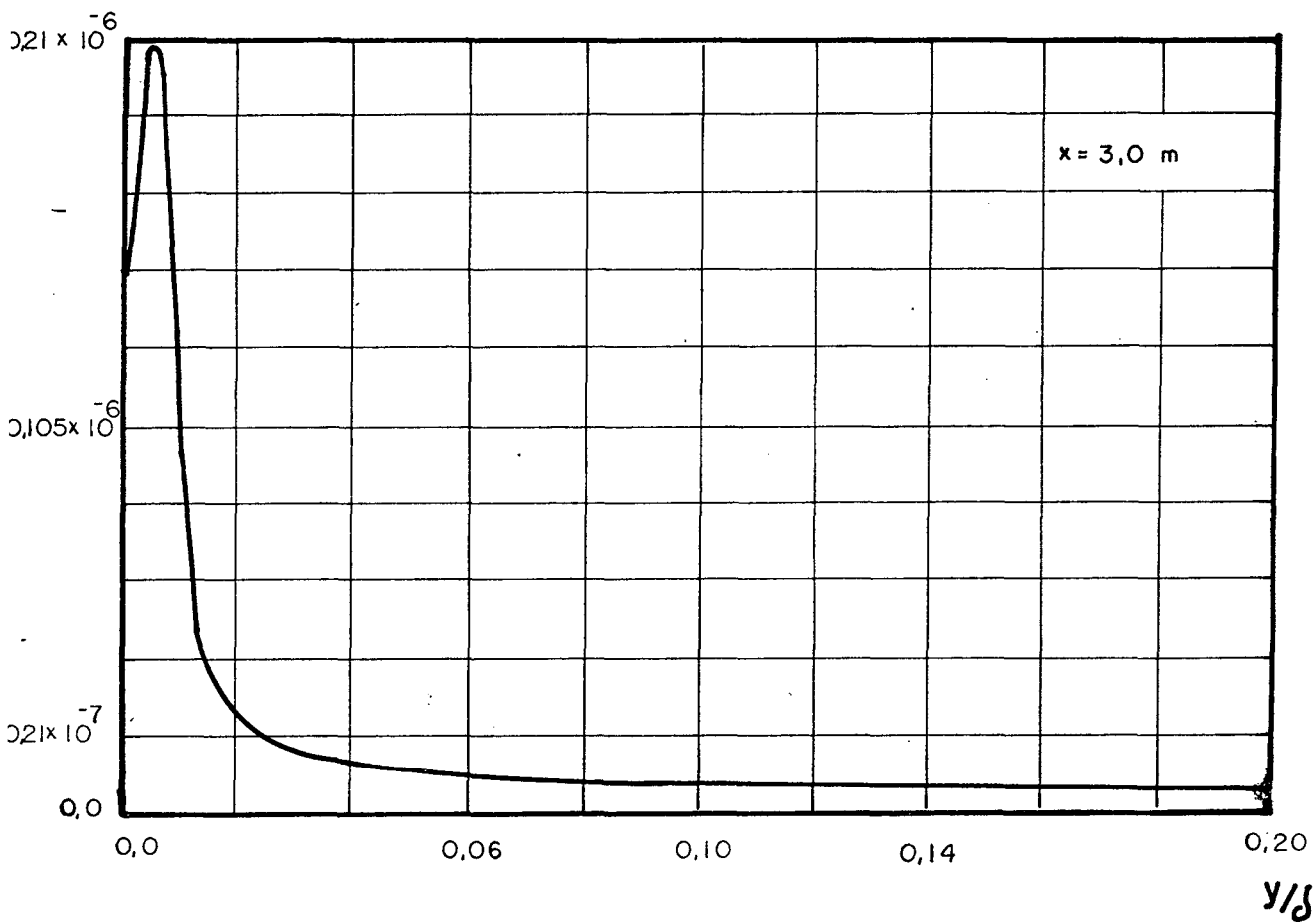


FIGURA 4.30 - PERFIL DA TAXA DE DISSIPACÃO- CASO 1200

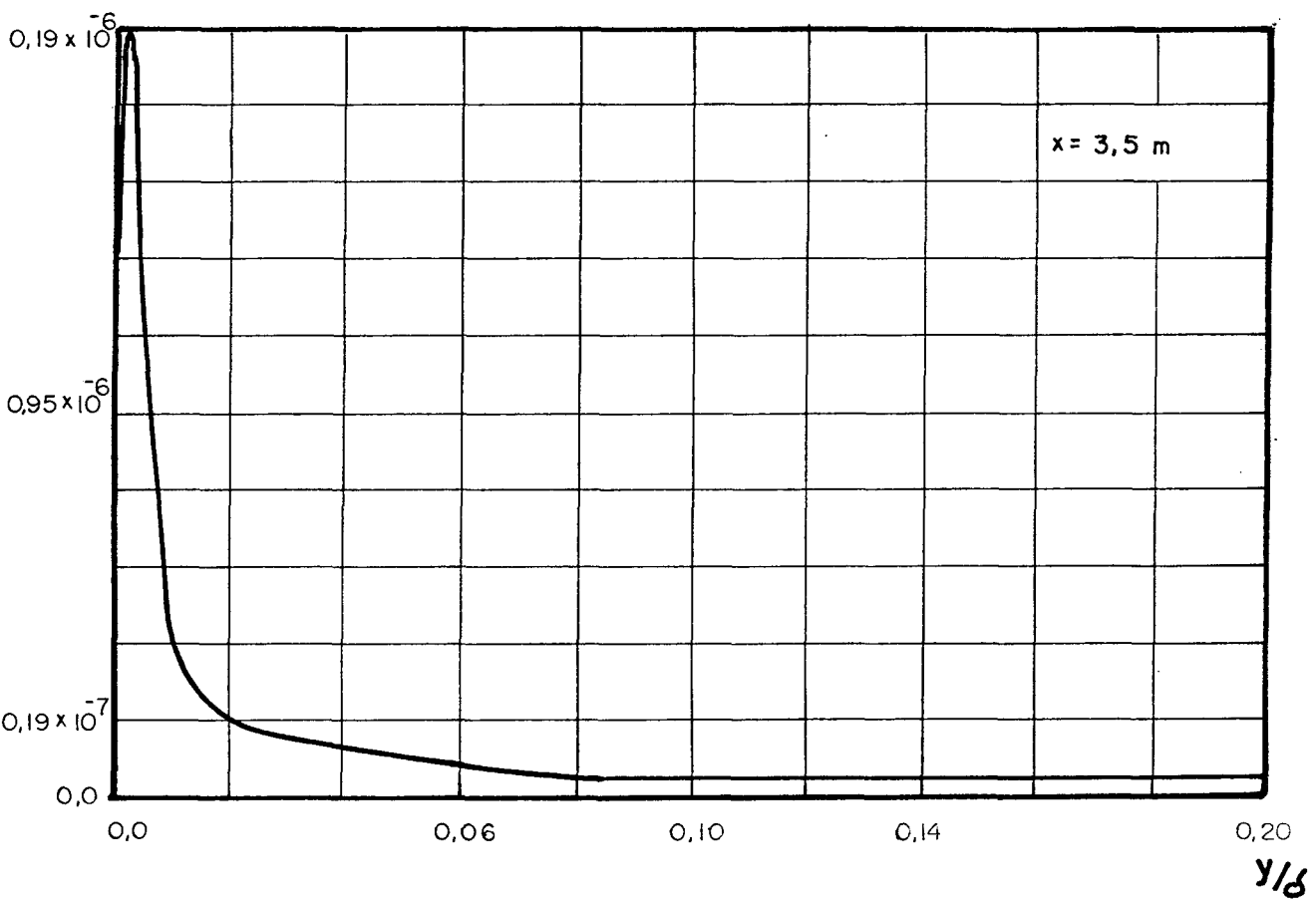


FIGURA 4.31 - PERFIL DA TAXA DE DISSIPACÃO -CASO 1100

ma, é necessário se ter um modelo que origine perfis de temperatura e velocidade realistas, ou seja, fiéis ao que acontece no escoamento real.

Conforme a equação (2.82), ϵh é uma função de ϵm , obtida pelo número de Prandtl turbulento, sendo este calculado por uma equação experimental, conforme Kays (10).

Ao se obter uma distribuição apropriada para ϵm , tal fato também ocorrerá com ϵh , visto ser conhecido o número de Prandtl turbulento.

A viscosidade turbulenta, ϵm , segundo a seção (2.5), é obtida através de uma relação entre a energia cinética turbulenta, \bar{q} , e a taxa de dissipação, $\bar{\nu}$, tal como o coeficiente de viscosidade cinemática, ν , relaciona tensão cisalhante com deformação ocorrida.

Para se determinar a validade de tal hipótese, com base na hipótese de Van-Driest, são plotados os gráficos comparativos na figura 4.1, entre a hipótese para ϵm usada no presente trabalho e a hipótese de ϵh conforme a equação de Van-Driest, que segue,

$$\epsilon m = K^2 y^2 \left[1 - e^{-(y/A)} \right]^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Esta equação está analisada no apêndice F.

Conforme a figura 4.1, a hipótese usada, com $YIN=100$, concorda em parte com a hipótese de Van-Driest, sendo uma função com um comportamento contínuo, fato este que gera discrepância com os resultados obtidos com a citada hipótese. Devido a continuidade a apresentada, a hipótese proposta foi considerada válida e usada

no presente trabalho, pois, como pode ser observado, a hipótese de Van-Driest apresenta descontinuidade na sua derivada.

4.7. ANÁLISE DE PARÂMETROS AUXILIARES

4.7.1. COEFICIENTES DE FRICÇÃO

O coeficiente de fricção C_f , sendo um grupo adimensional que relaciona, localmente, tensões cisalhantes, com forças de inércia, é um número característico de um escoamento sendo, portanto, comparável com valores experimentais obtidos por outros trabalhos.

No apêndice F as equações (F.6) a (F.9) permitem obter o comportamento de C_f ao longo do escoamento, através de relações experimentais ou através de valores calculados no problema. Com a equação (F.7), C_f é calculado como resultado da solução do perfil de velocidade obtido no problema.

Na figura 4.32 estão plotados os valores de C_f obtidos segundo as equações citadas, para o escoamento em placa plana, com gradiente de pressão nulo.

Como comparação, os valores de C_f obtidos no trabalho de Wieghardt, encontrado em (25), estão plotados e permitem concluir que a faixa de erro entre os valores experimentais e numéricos não excede a 15%.

Nas figuras 4.33 a 4.35 estão plotados os valores de C_f obtidos segundo as equações (F.7) e (F.9) para os escoamentos sujeitos a gradientes de pressão não nulos, tendo como comparativo valores experimentais obtidos no trabalho de Ludwig e

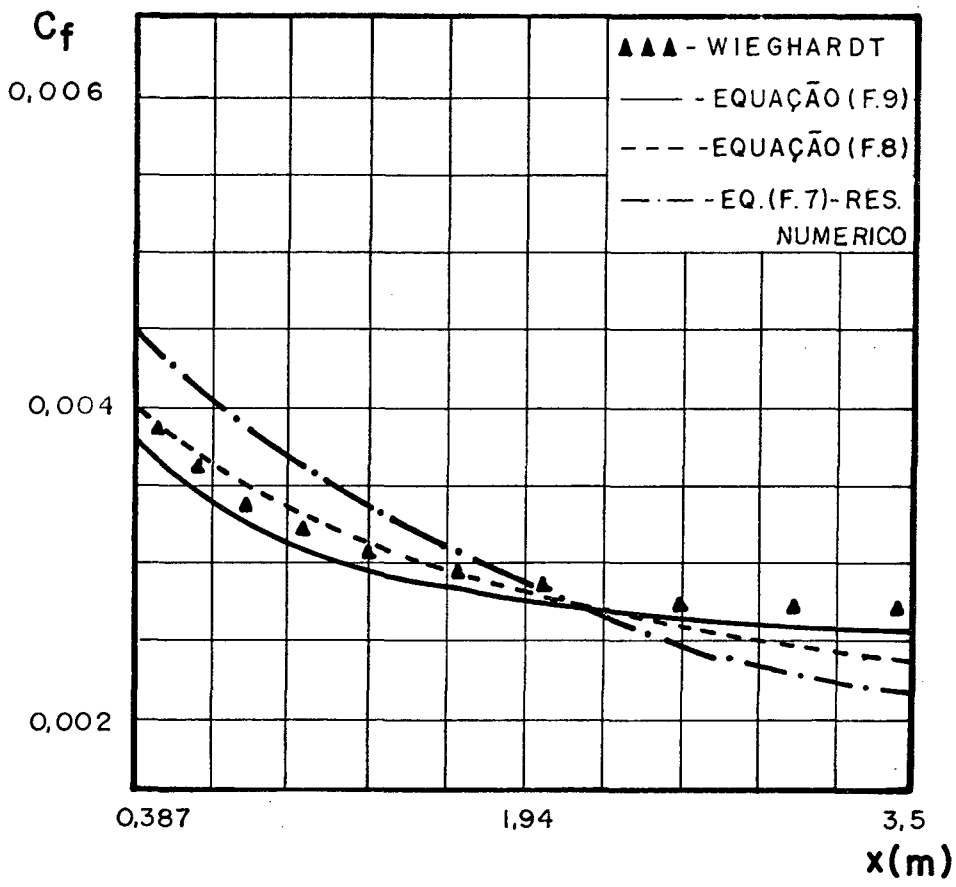


FIGURA 4.32 - CASO 1400

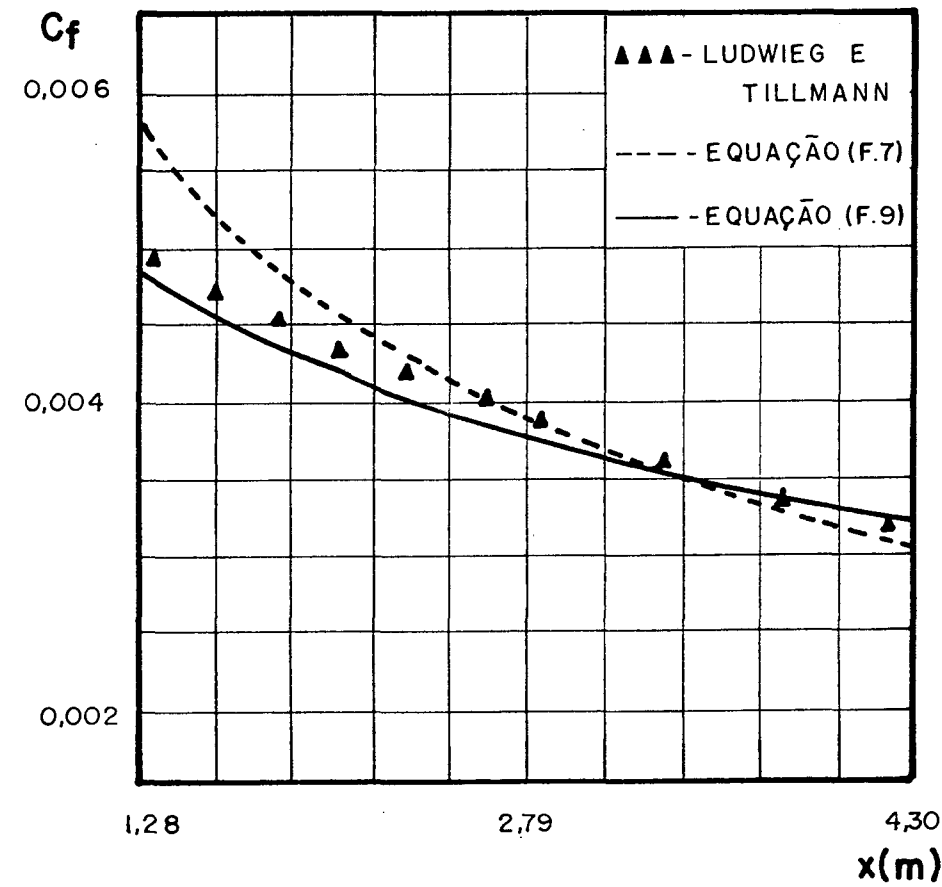


FIGURA 4.33 - CASO 1300

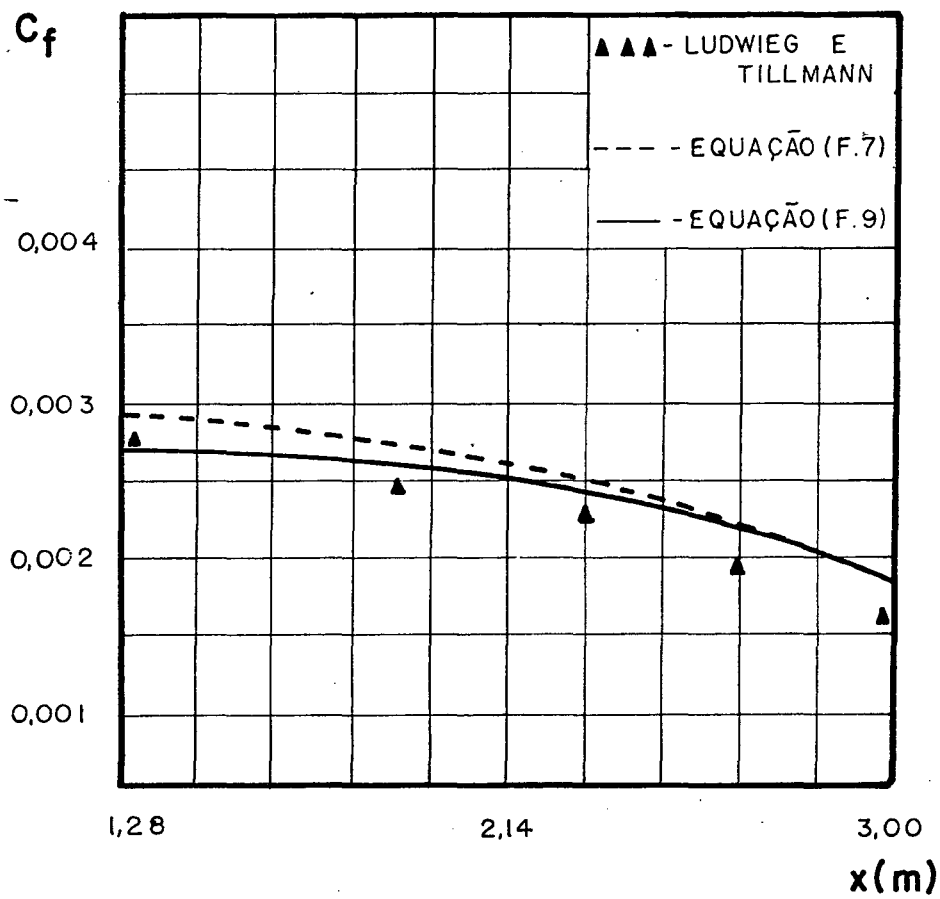


FIGURA 4.34 - CASO 1200

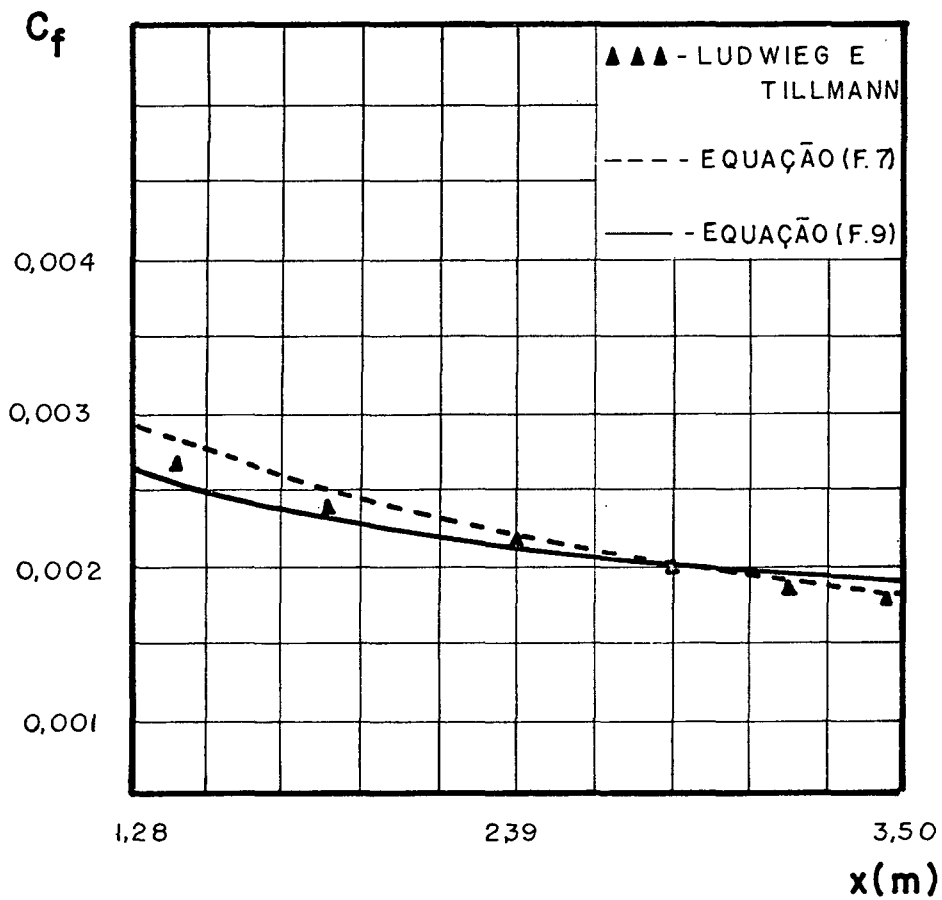


FIGURA 4.35 - CASO 1100

Tillmann, encontrado em (25), onde se observa que a faixa de erro permanece na ordem de 15%, no máximo.

4.7.2. FATOR DE FORMA

O fator de forma H de um escoamento é a relação entre as espessuras de deslocamento, δ^* , e de quantidade de movimento, θ , tal que,

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \frac{u_{\infty} - u}{u_{\infty}} dy \quad (4.9)$$

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}} \right) dy \quad (4.10)$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (4.11)$$

A equação (4.11) permite obter a relação entre o fluxo de massa e a quantidade de movimento no escoamento, o que corresponde a uma relação inversa da aceleração do fluido em escoamento, na camada limite.

Na figura 4.36 está plotado o valor de H calculado no presente trabalho para o escoamento com gradiente de pressão nulo, tendo como comparativo valores experimentais obtidos no trabalho de Wieghardt (25), onde pode se observar que o erro existente entre os valores numéricos e experimental nunca é superior a 10%.

Na figura 4.37 está plotado o valor de H calculado para o escoamento com gradiente de pressão favorável, comparado

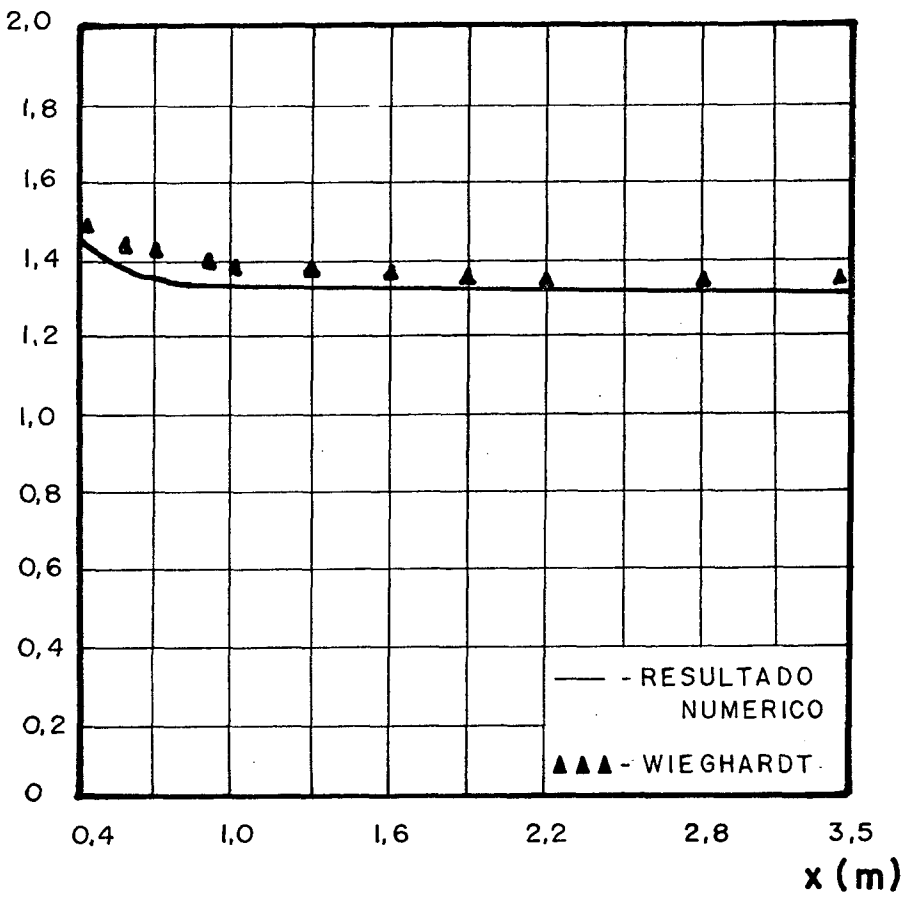


FIGURA 4.36 - CASO 1400

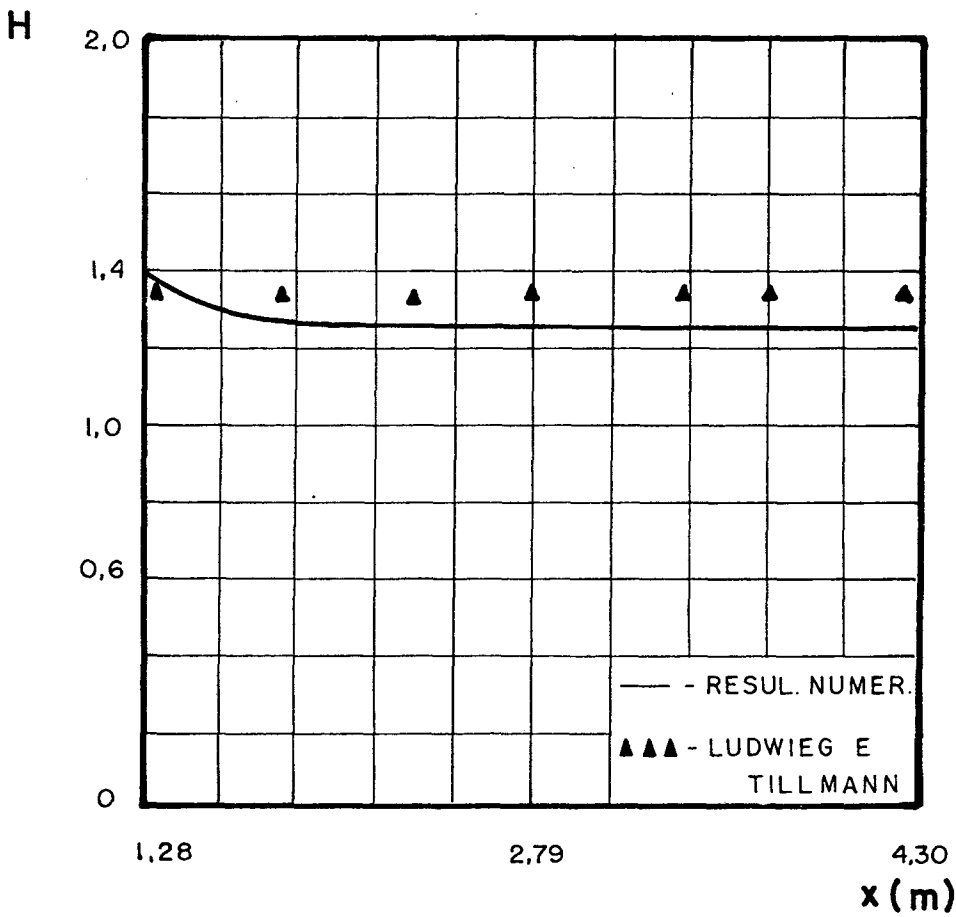


FIGURA 4.37 - CASO 1300

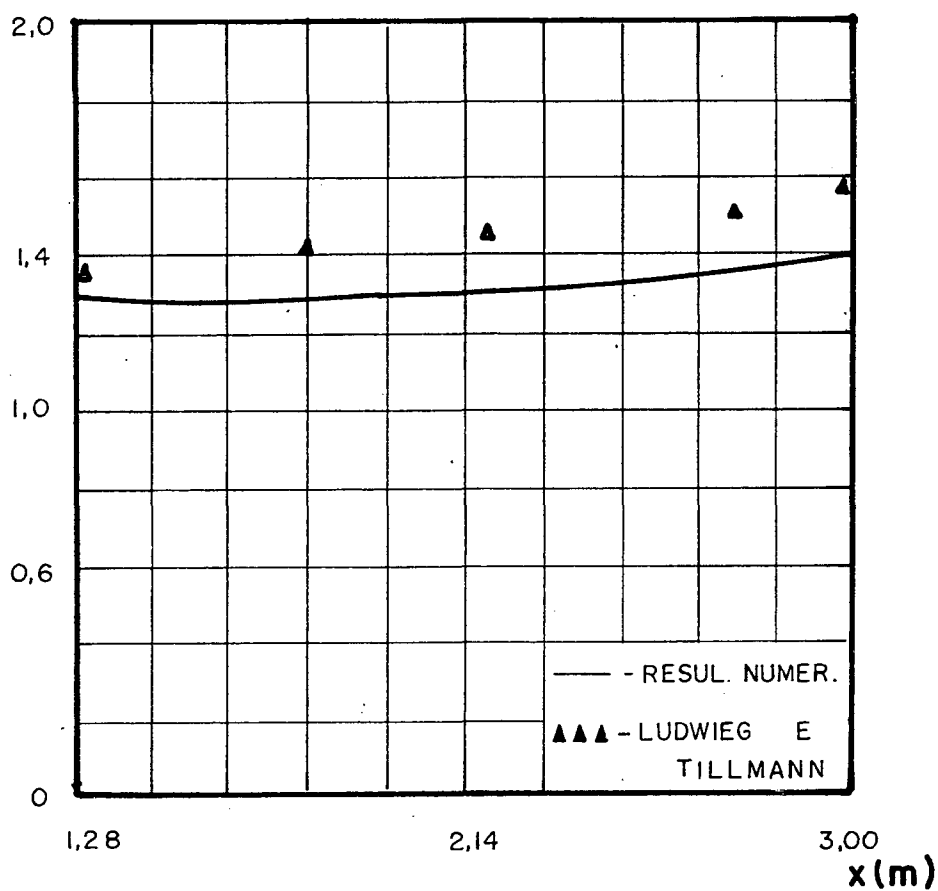


FIGURA 4.38 - CASO 1200

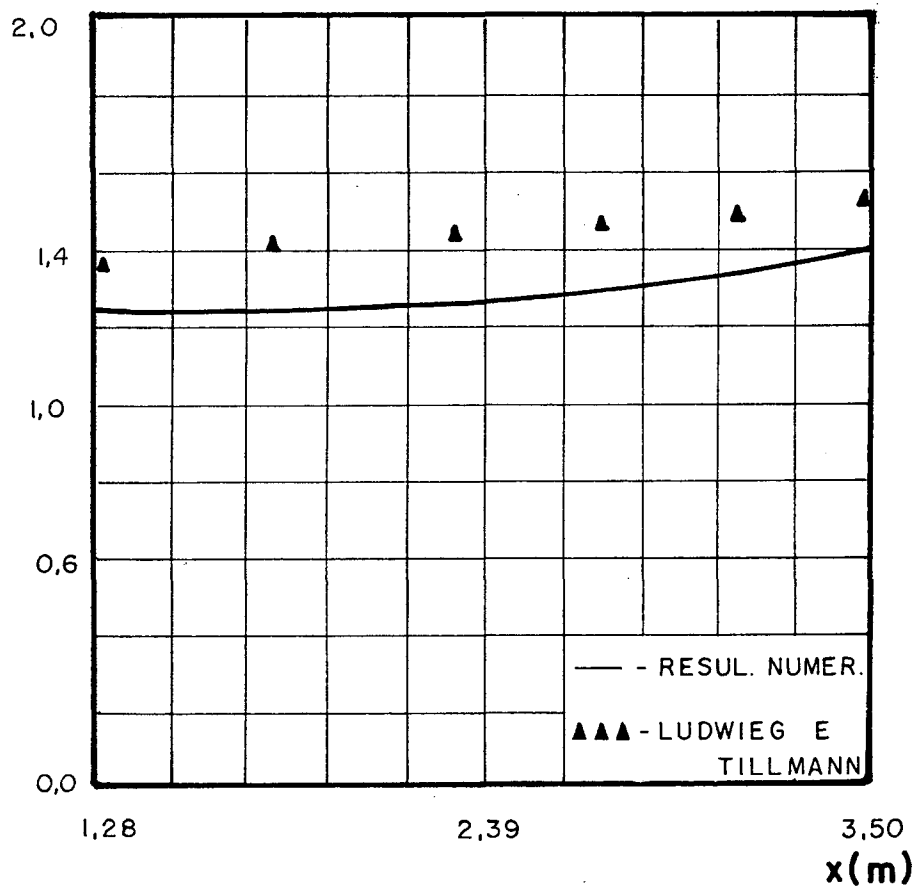


FIGURA 4.39 - CASO 1100

com valores obtidos por Ludwig e Tillmann (25), onde pode se observar que o erro permanece com o valor máximo na ordem de 10%.

Nas figuras 4.38 e 4.39 estão plotados os valores de H calculados para o escoamento com gradiente de pressão adverso, comparado com valores obtidos por Ludwig e Tillmann (25) onde pode se observar a tendência de crescimento do valor de H , que corresponde a uma redução na velocidade do escoamento e, também, se observa que o erro permanece na faixa de 10%.

4.8. ANÁLISE DOS NÚMEROS CARACTERÍSTICOS DO ESCOAMENTO

4.8.1. NÚMERO DE NUSSELT

O número de Nusselt, que é a relação entre o gradiente de temperatura no fluido, quando $y=0$, e o gradiente de referência baseado nas temperaturas da parede e do escoamento potencial, é obtido na solução do problema como uma forma de se ter a convecção de calor na parede e portanto, o fluxo de calor entre a superfície e o fluido.

Por esta definição, Nusselt é obtido através da seguinte expressão,

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k_f} \quad (4.12)$$

Este valor é calculado com base nos perfis de temperatura obtidos na solução do problema e comparado com a relação experimental, obtida em Kays (10), o qual tem a seguinte forma,

$$Nu_x = 0,0288 Pr_x^{0,3} Re_x^{0,8} \quad (4.13)$$

Conforme a equação (4.13), o número de Nusselt é função da relação entre o transporte turbulento de quantidade de movimento e o transporte turbulento de calor no fluido e é também função da relação entre as forças de inércia e as forças viscosas no escoamento, tal que, um acréscimo em Nu_x ao longo do escoamento, corresponde a uma maior razão na relação de transportes mencionadas.

Isto concorda com a diminuição do valor do fluxo de calor na parede quando se percorre o escoamento, verificada ao se analisar o perfil de temperatura.

Na figura 4.40 está plotado o número de Nusselt calculado, para um escoamento com gradiente de pressão nulo, tendo como comparativo os valores obtidos com a equação (4.13), onde pode se observar a tendência crescente do número de Nusselt e também que o erro máximo entre os valores calculados e experimentais está na faixa de 15%.

Nas figuras 4.41 a 4.43, onde estão plotados os valores do número de Nusselt para os escoamentos com gradientes de pressão não nulo, obtidos na solução do problema e pela equação experimental (4.13), o mesmo comportamento de crescimento apresentado na figura 4.40 é verificado e a faixa de erro máximo permanece na ordem de 15%.

Na figura 4.44 está plotado o valor do número de Nusselt calculado, em função do número de Reynolds, ao longo de um escoamento sujeito a um gradiente de pressão nulo.

Como comparativo, nesta figura, estão relacionados os

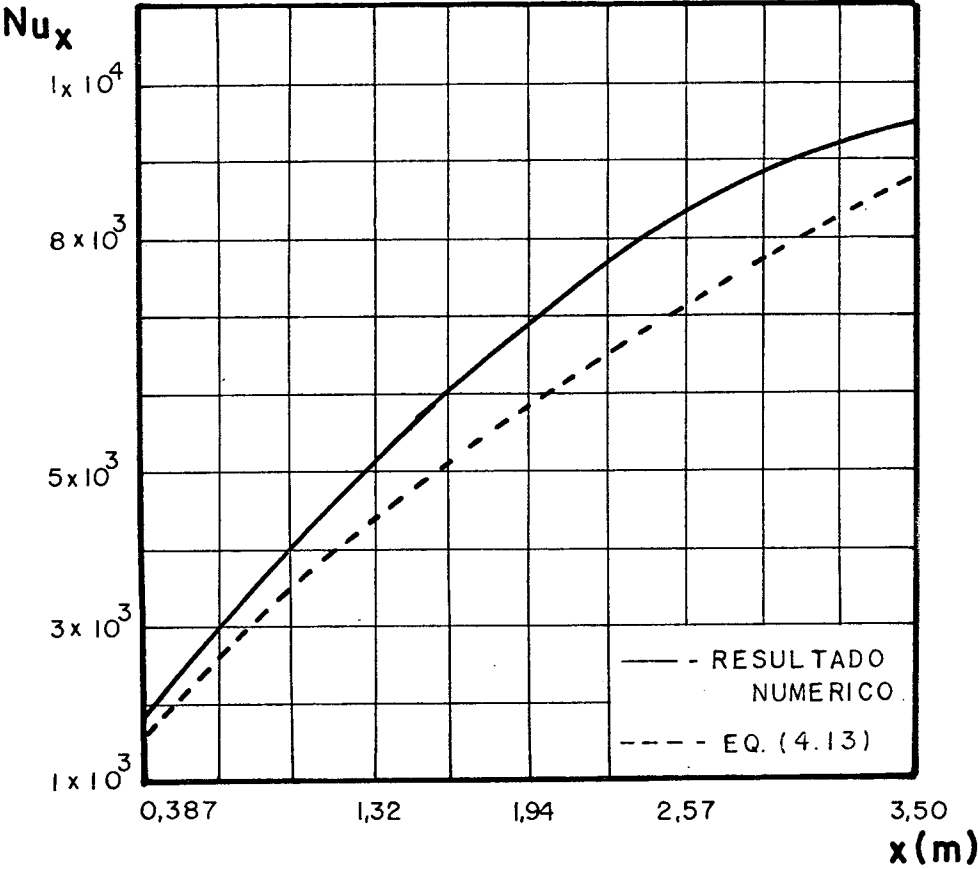


FIGURA 4.40 - CASO 1400

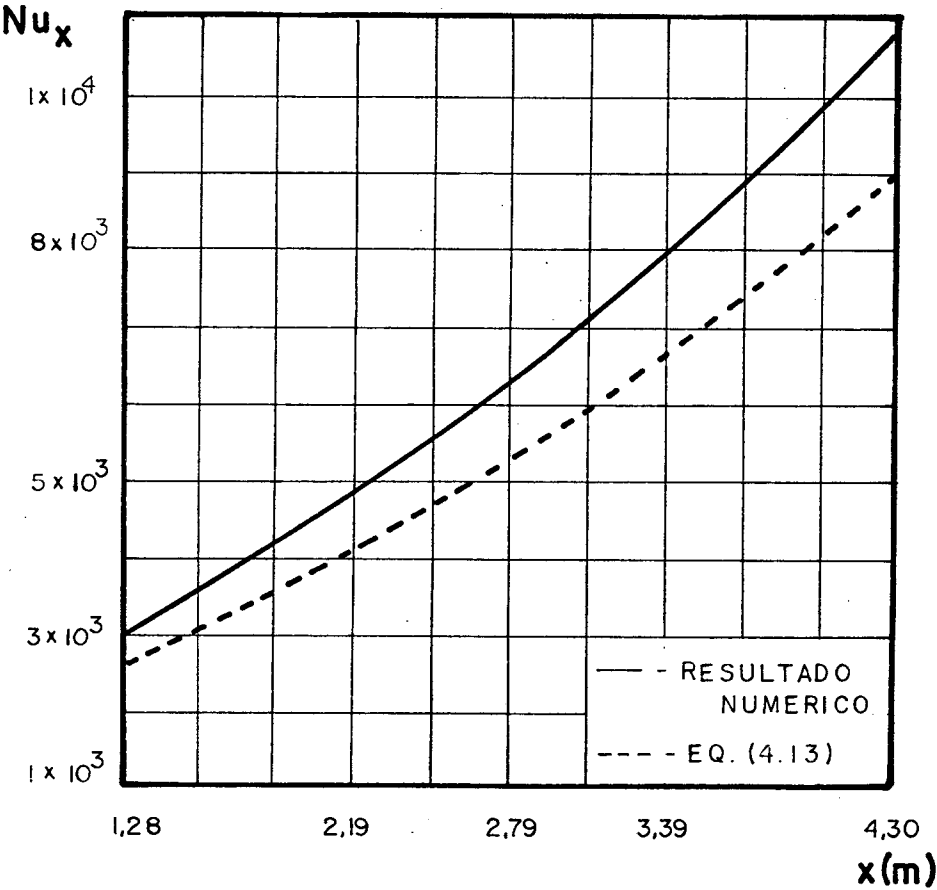


FIGURA 4.41 - CASO 1300

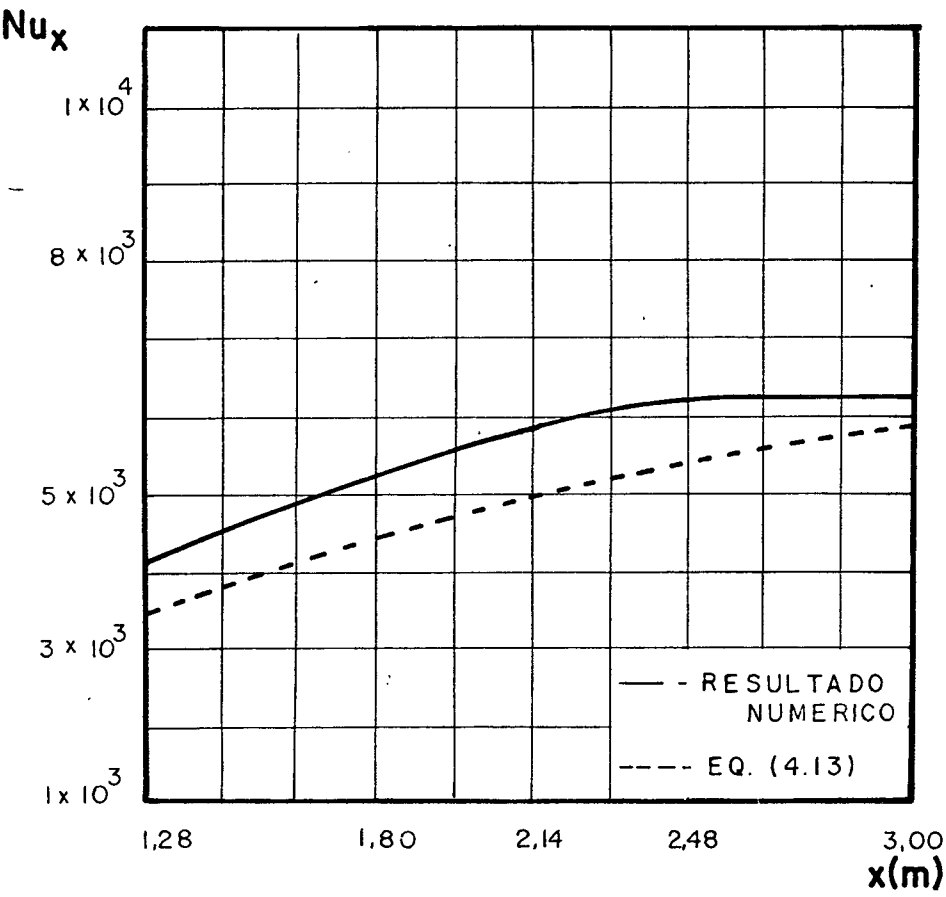


FIGURA 4.42 - CASO 1200

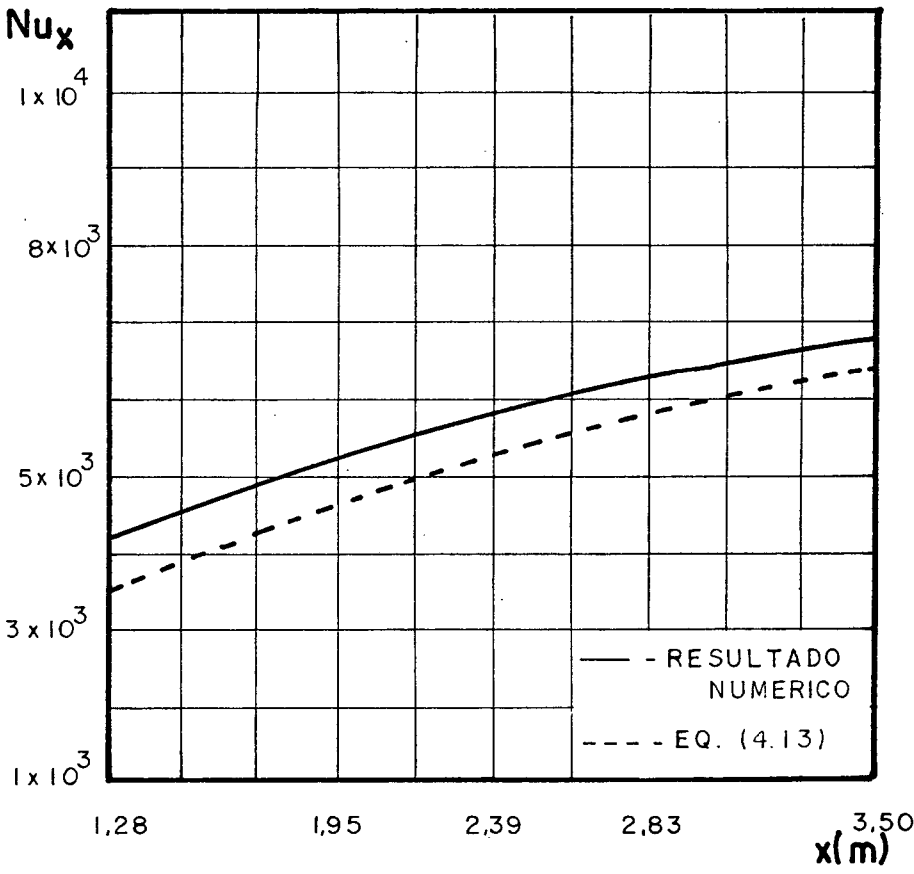


FIGURA 4.43- CASO 1100

valores experimentais obtidos por Nitsche (16), para um escoamento em placa plana, com fluxo de calor constante na parede, onde pode se observar um erro de 10% entre os valores plotados.

4.8.2. NÚMERO DE STANTON

O número de Stanton fornece a relação entre a transmissão de calor e as tensões viscosas no escoamento, na seguinte forma,

$$St_x = \frac{h_x}{\rho C_p u_\infty} \quad (4.14)$$

Esta relação permite verificar o comportamento das variáveis obtidas como resultado do problema.

Para obter a validade do comportamento do número de Stanton, são usados como comparativos, para o escoamento com gradiente de pressão nulo, os resultados obtidos por Nitsche (16).

Na figura 4.45 está plotado o número de Stanton em função do número de Reynolds, sendo comparado aos resultados de Nitsche (16) onde se verifica que o erro nunca é superior a 10%.

Segundo Kays (10), a seguinte expressão pode ser usada na obtenção do número de Stanton,

$$St_x = 0,0295 Re_x^{-0,2} Pr_x^{-0,4} \quad (4.15)$$

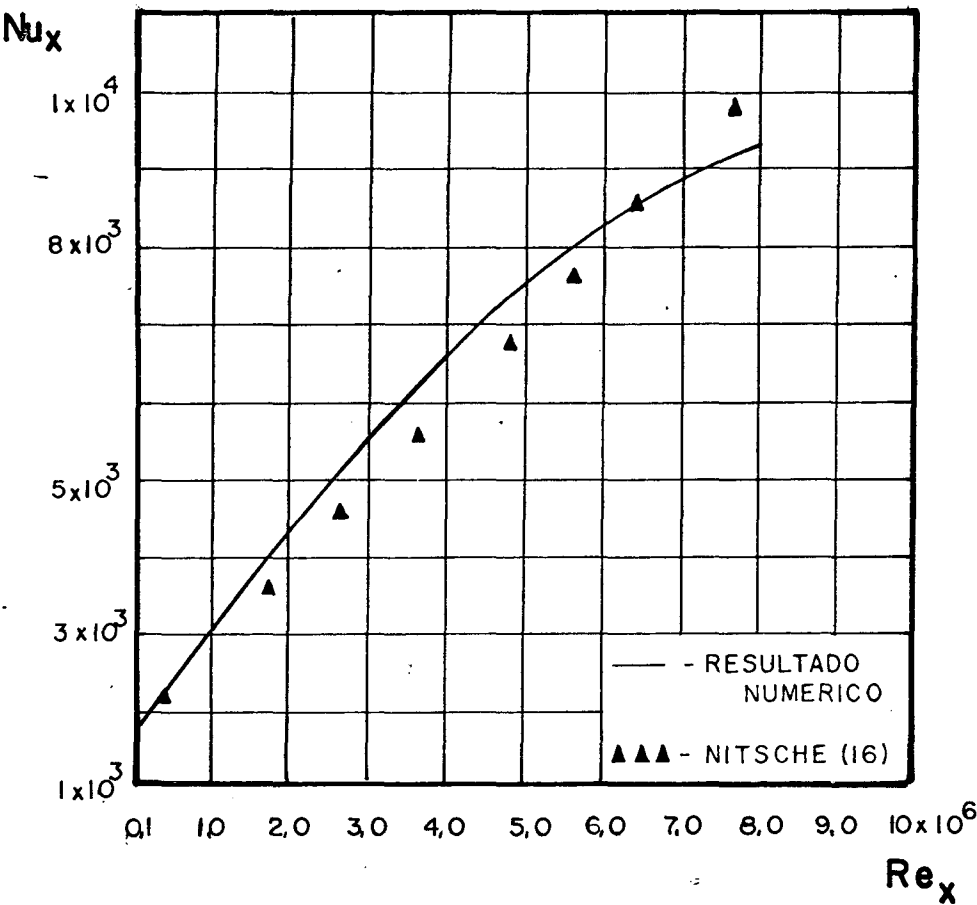


FIGURA 4.44 - CASO 1400

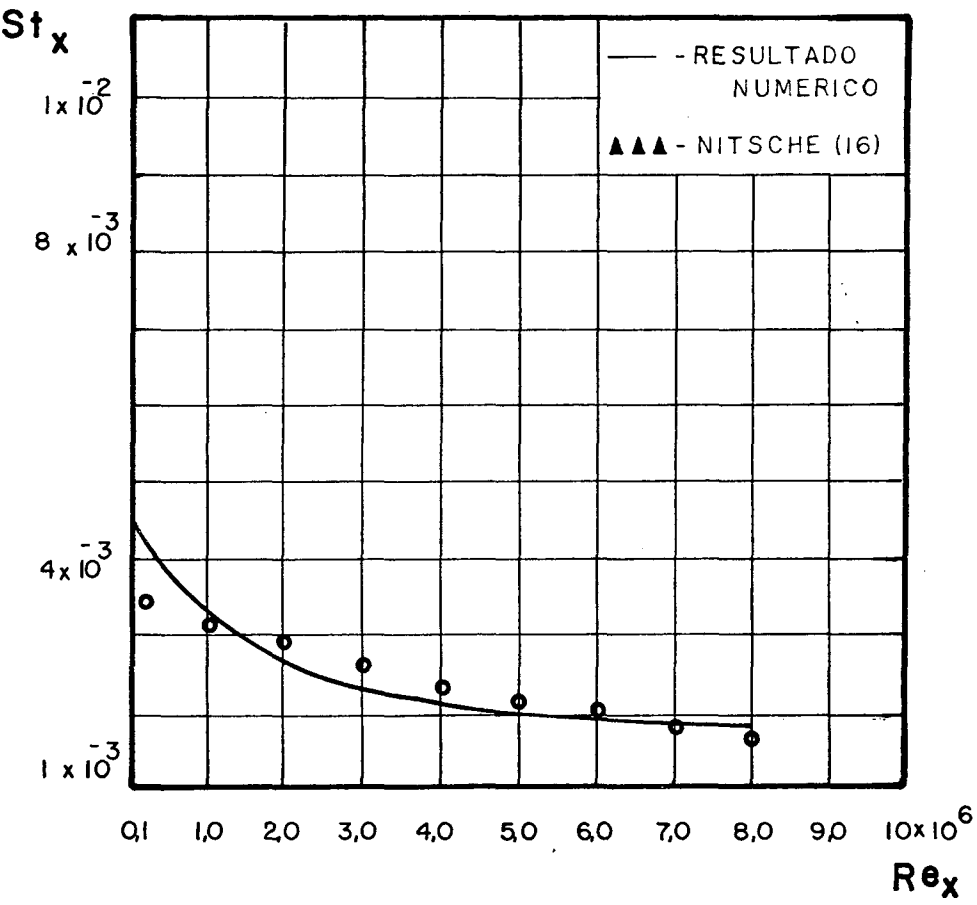


FIGURA 4.45 - CASO 1400

Na figura 4.46 está plotado o número de Stanton em função de x , distância percorrida ao longo do escoamento, para um gradiente de pressão nulo, tendo como comparativo valores obtidos pela equação (4.15), onde pode se observar que a discrepância entre os valores plotados não excede a 10%.

Para os casos de escoamento com gradiente de pressão variável, verifica-se que o número de Stanton tem um valor decrescente em x , mostrando que as forças viscosas tendem a crescer numa razão maior que a transmissão de calor entre a parede e o escoamento.

Este comportamento está mostrado nas figuras 4.47 a 4.49, onde são comparados os valores calculados segundo a equação (4.14) com os valores obtidos pela equação (4.15), onde se verifica que as diferenças apresentadas entre os valores plotados permanece na ordem de um máximo em 15%.

4.8.3. NÚMERO DE PRANDTL

O número de Prandtl turbulento, que fornece a relação entre o transporte de quantidade de movimento ao escoamento e o transporte de energia térmica ao longo da seção de fluxo é, para um escoamento turbulento, a relação entre a viscosidade turbulenta, ϵ_m , e o coeficiente de difusão térmica turbulenta, ϵ_h .

Esta relação é obtida segundo Rotta (20), através da equação (2.84) e segundo Kays (10) através da equação (2.83).

Na figura 4.50 estão plotados os valores de Pr_t , obtidos pelas citadas equações, sendo comparados aos valores experi

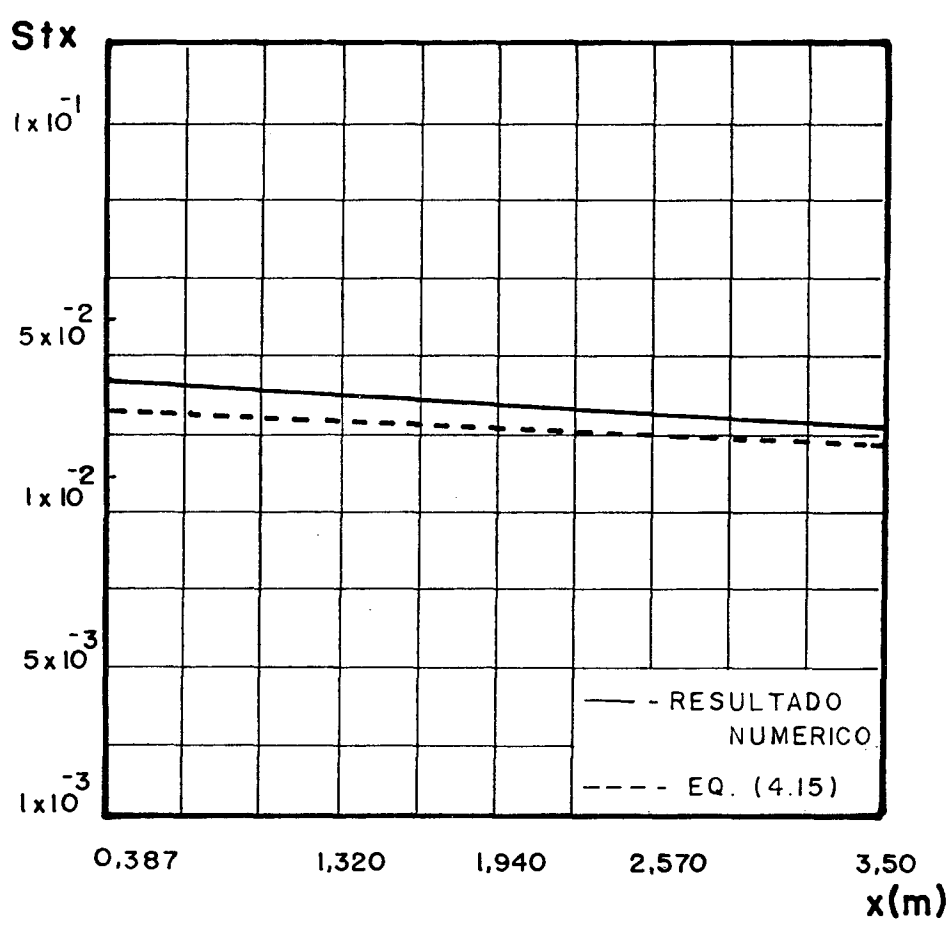


FIGURA 4.46 - CASO 1400

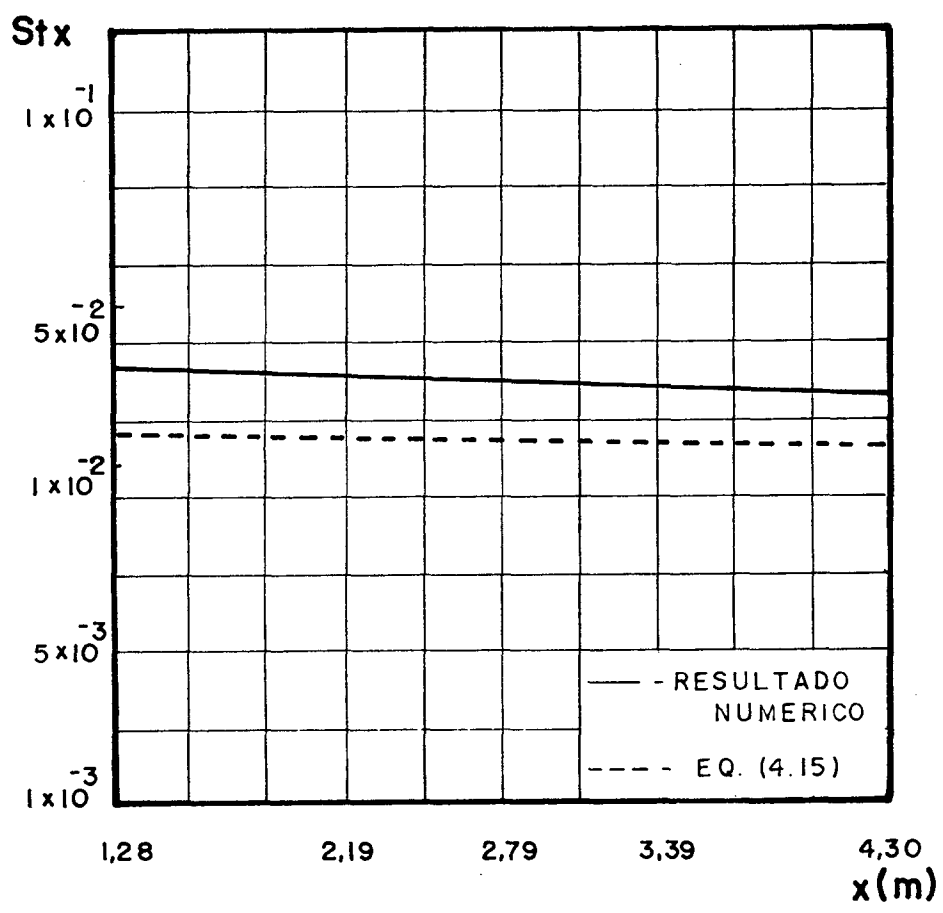


FIGURA 4.47 - CASO 1300

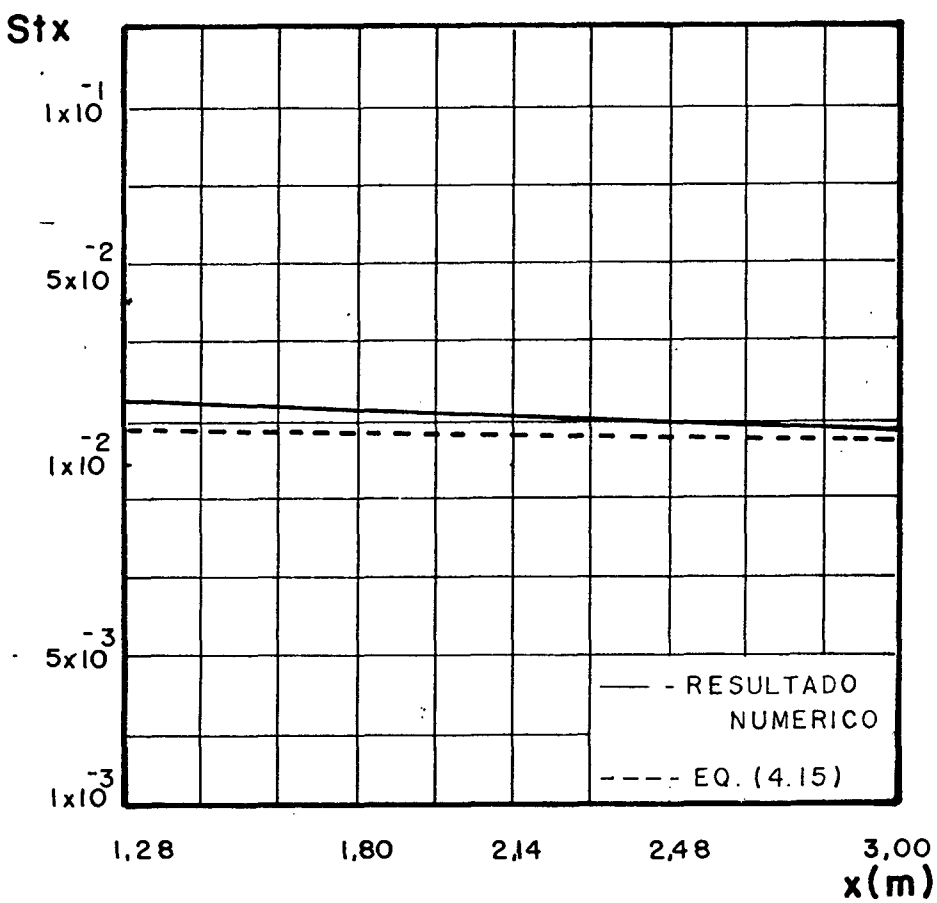


FIGURA 4.48 - CASO 1200

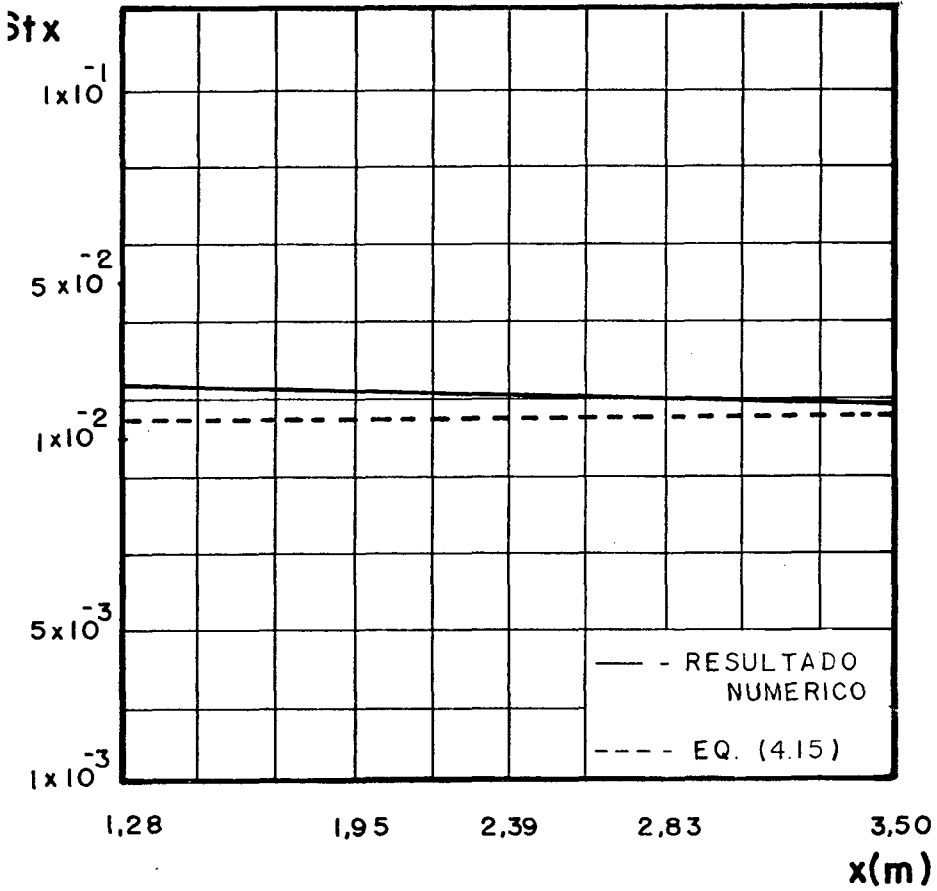


FIGURA 4.49 - CASO 1100

rimentais obtidos por Blackwell, encontrado em Kays (10), para o escoamento com gradiente de pressão nulo, caso 1400.

Este escoamento é usado na calibração do método, o que motiva sua utilização nesta comparação.

Nesta figura se verifica que o número de Prandtl turbulento calculado pela equação (2.83) tem menor discrepância em relação aos valores experimentais, fato este que levou ao seu uso no presente trabalho.

4.9. ANÁLISE DOS BALANÇOS NAS EQUAÇÕES DO PROBLEMA

As equações (2.97), (2.98) e (2.99) são equações que realizam o balanço de energia cinética turbulenta, taxa de dissipação e temperatura, respectivamente.

Estes balanços serão analisados a seguir.

4.9.1. EQUAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

A equação (2.97) pode ser escrita, com relação ao seu balanço, como segue,

$$\text{CONV(EC)} = \text{PROD(EC)} + \text{DIF(EC)} - \text{DIS(EC)} \quad (4.16)$$

Nesta expressão, CONV(EC) se refere a convecção da energia cinética turbulenta realizada pelo fluido em escoamento, ou seja, o transporte de energia cinética turbulenta na direção do escoamento. PROD(EC) se refere a produção de energia cinética turbulenta a partir do escoamento principal. DIF(EC) se refere à difusão de energia cinética turbulenta na seção de fluxo do

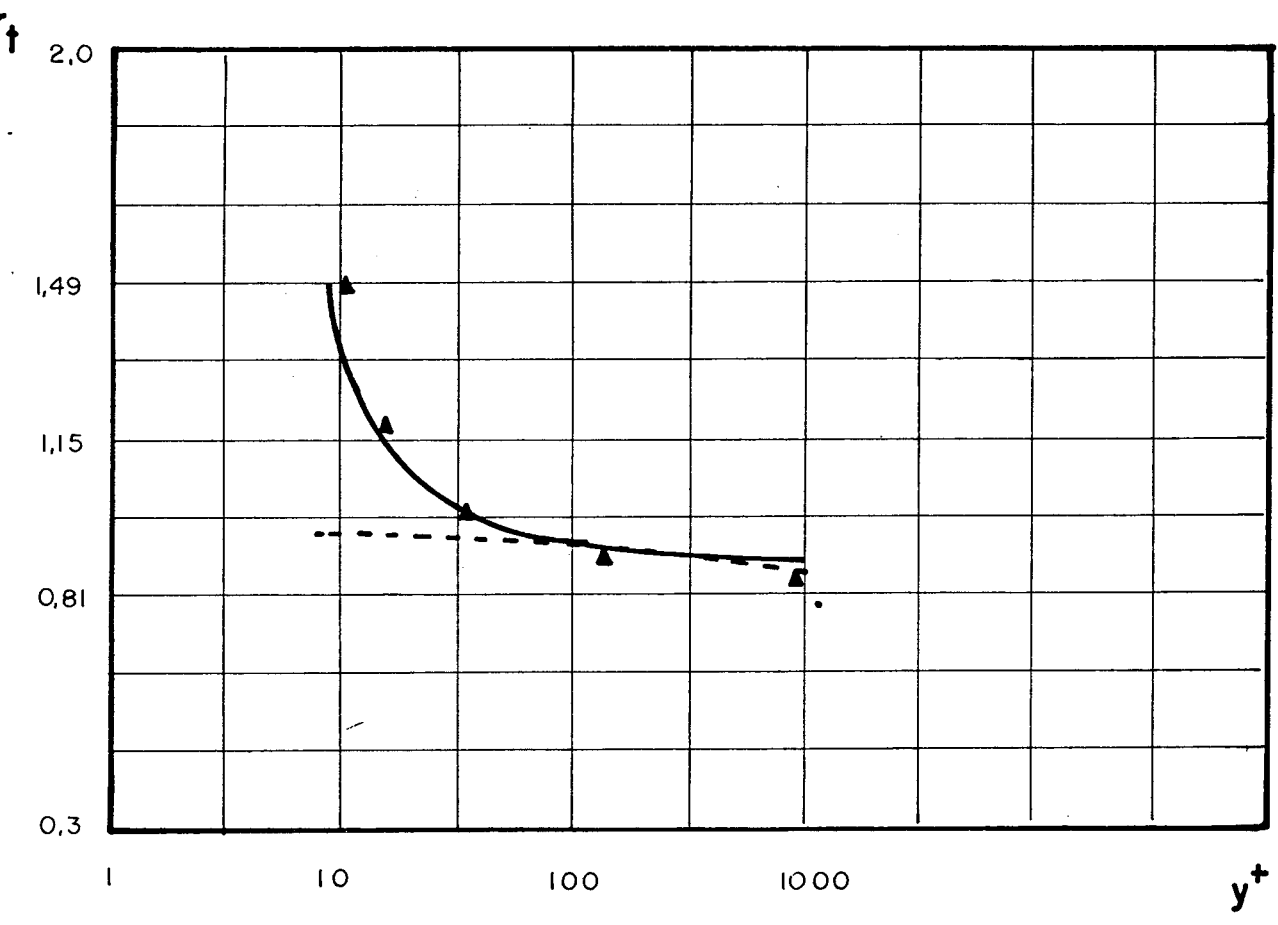


FIGURA 4.50 - NUMERO DE PRANDTL TURBULENTO

Pr_t

LEGENDA

- ▲▲▲ - BLACKWELL
- - EQUAÇÃO (2.83)
- - - - EQUAÇÃO (2.84)

escoamento. DIS(EC) se refere a dissipação de energia cinética turbulenta.

Na figura 4.51 estão plotados os resultados obtidos na solução do problema, para um escoamento com gradiente de pressão nulo, caso 1400, usado no ajuste do sistema de equações, tendo como referência valores de Klebanoff (34), para a região próxima a parede.

Esta figura mostra que a solução da equação da energia cinética turbulenta tem, no seu balanço de perdas e ganhos, um valor nulo e um comportamento dentro do esperado, onde os ganhos e as perdas de energia cinética turbulenta estão com o comportamento conforme previsto por Klebanoff(34).

Está mostrado também que a região próxima da parede contribui decididamente no balanço de energia cinética turbulenta onde se verifica que a produção é máxima perto da parede, onde também ocorre a maior dissipação, e que na região $y/\delta < 0,1$ ocorre a quase totalidade do balanço de energia cinética turbulenta no escoamento.

4.9.2. EQUAÇÃO DA TAXA DE DISSIPACÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

A equação (2.98) pode ser escrita, com relação ao seu balanço, como segue,

$$\text{CONV(DIS)} = \text{DIF(DIS)} + \text{PROD(DIS)} - \text{DIS(DIS)} \quad (4.17)$$

Nesta expressão, CONV(DIS) é o termo de convecção isto é, transporte de taxa de dissipação na direção do escoamento.

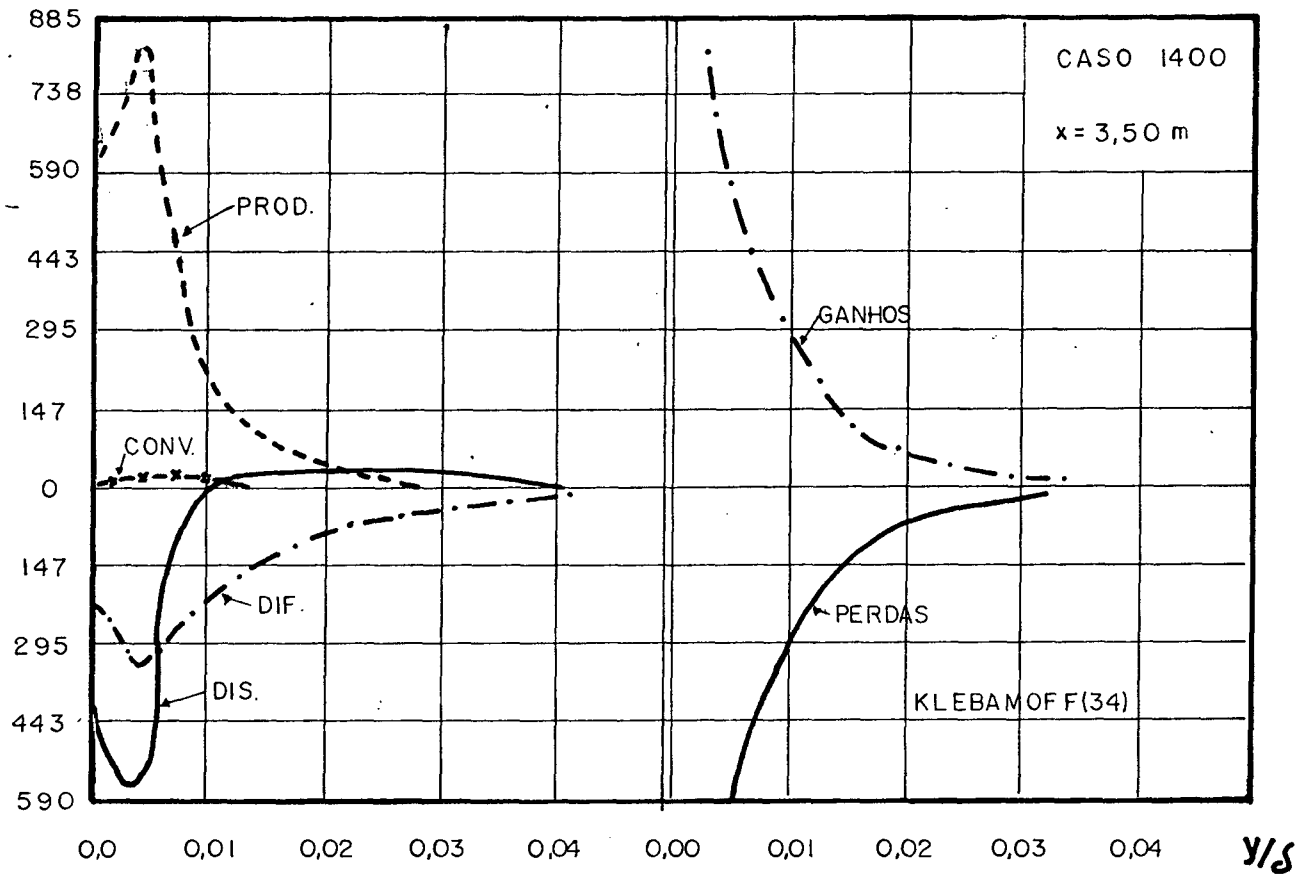


FIGURA 4.51 - BALANÇO DE ENERGIA CINETICA TURBULENTA

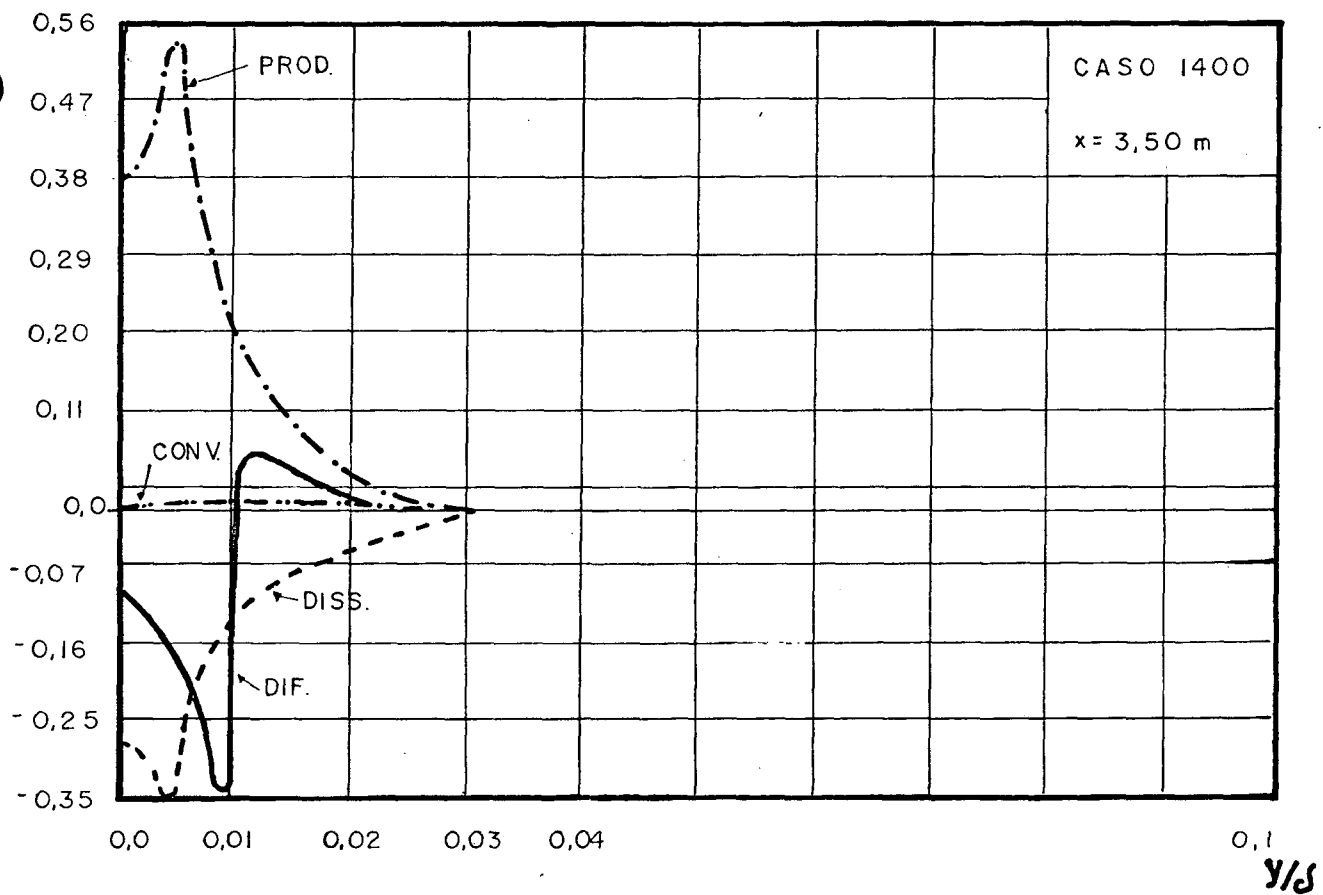


FIGURA 4.52 - BALANÇO DA TAXA DE DISSIPAÇÃO

PROD(DIS) é o termo de produção de taxa de dissipação, a qual é oriunda do termo DIS(EC) da expressão (4.16). DIF(DIS) e DIS(DIS) são os termos de difusão e dissipação da taxa de dissipação no escoamento, respectivamente, onde a difusão é o transporte da taxa de dissipação na direção perpendicular ao fluxo, isto é, ao longo da espessura da camada limite, e a dissipação é um termo semelhante a DIS(EC) na equação (4.16).

Na figura 4.52 estão plotados os resultados obtidos na solução do problema, para um escoamento com gradiente de pressão nulo, caso 1400, usado no ajuste do sistema de equações.

Esta figura mostra que a solução da equação da taxa de dissipação tem, no seu balanço de perdas e ganhos, um valor nulo.

Está mostrado também que a região próxima da parede contribui decididamente no balanço da taxa de dissipação, isto é, na região $y/\delta < 0,1$ ocorre a quase totalidade do balanço realizado no escoamento.

4.9.3. EQUAÇÃO DA ENERGIA

A equação (2.99) pode ser escrita, com relação ao seu balanço, como segue,

$$\text{CONV}(T) = \text{DIF}(T) + \text{PRODIS}(T) + \text{PROVIS}(T) + \text{PRODECN}(T) - \text{GERTUR}(T) \quad (4.18)$$

Nesta expressão, CONV(T) é o termo de convecção de energia, isto é, o transporte de temperatura ao longo do escoamento. DIF(T) é o termo de difusão de energia, isto é, o transporte de temperatura ao longo da seção de fluxo. PRODIS(T) é a pro

dução de temperatura oriunda do termo $\dot{D}IS(DIS)$ da expressão (4.17). $PROVIS(T)$ é a produção de energia devido as perdas viscosas no escoamento. $PRODECN(T)$ é a produção de energia devido à energia cinética turbulenta. $GERTUR(T)$ é a geração de turbulência no escoamento, devido a redução de temperatura.

Na figura 4.53 estão plotados os termos do balanço dado na expressão (4.18), para um escoamento com gradiente de pressão nulo e temperatura constante na parede, onde se observa que o balanço se caracteriza pela predominância dos termos de Convecção e Difusão, enquanto que os demais termos tem pequena influência no balanço de energia.

Na figura 4.54 estão plotados os termos do balanço para um escoamento com gradiente de pressão nulo e fluxo de calor constante na parede. Novamente se observa a predominância dos termos de Convecção e Difusão, onde a região $y/\delta < 0,5$ participa com uma maior quantidade de energia no balanço realizado.

Na figura 4.55 estão plotados os termos do balanço para um escoamento com gradiente de pressão adverso e temperatura constante na parede. Neste caso também se observa a predominância dos termos de Convecção e Difusão, onde a região $y/\delta > 0,5$ participa com uma maior quantidade de energia no balanço realizado.

Na figura 4.56 estão plotados os termos do balanço para um escoamento com gradiente de pressão adverso e fluxo de calor constante na parede. Também se observa a predominância dos termos de Convecção e Difusão, onde a região $0,2 < y/\delta < 0,5$ tem pequena influência no balanço realizado e que a região

$B(\theta)$

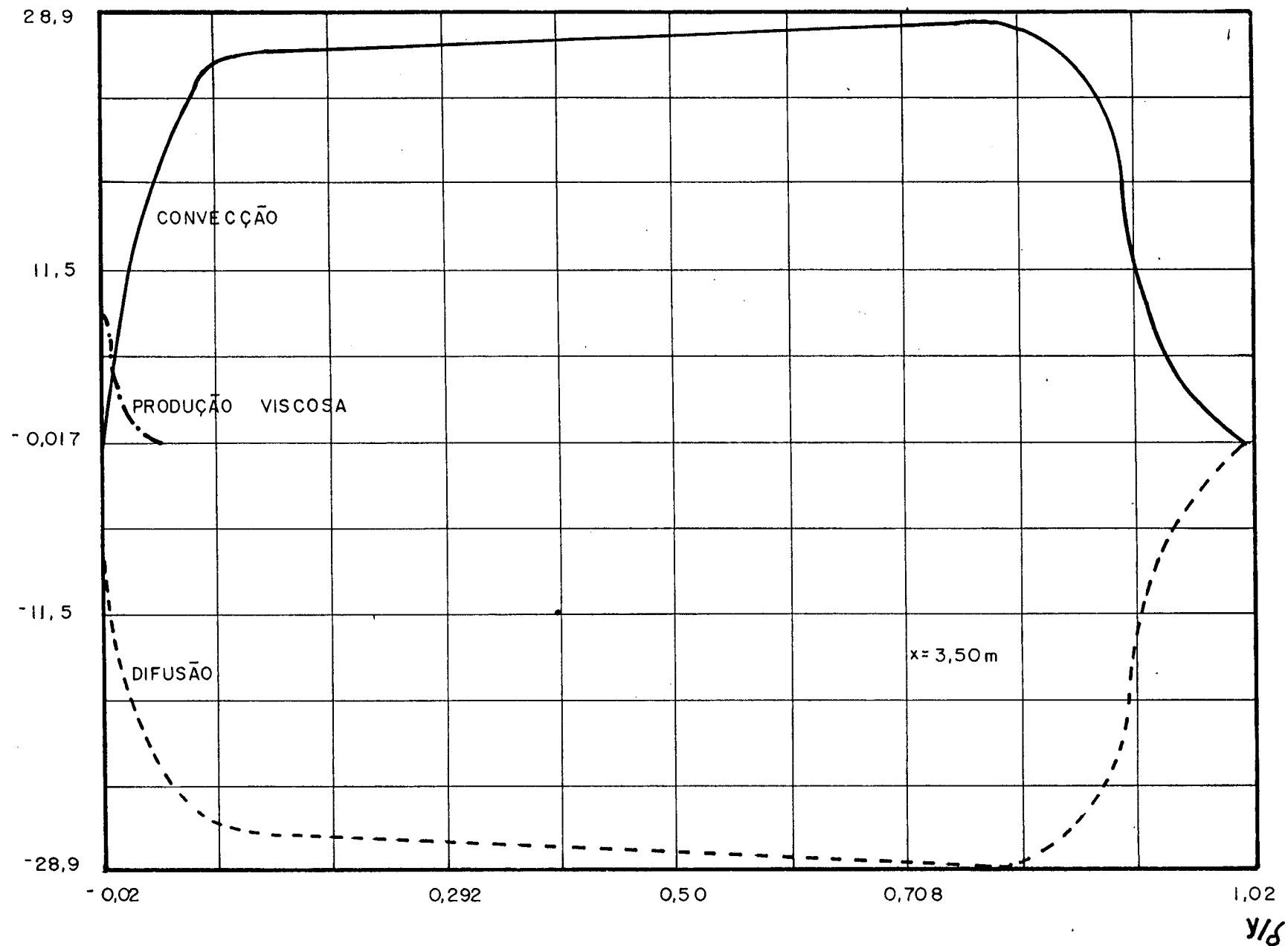


FIGURA 4.53 - BALANÇO TERMICO - CASO 1400 - TEMPERATURA NA PAREDE CONSTANTE

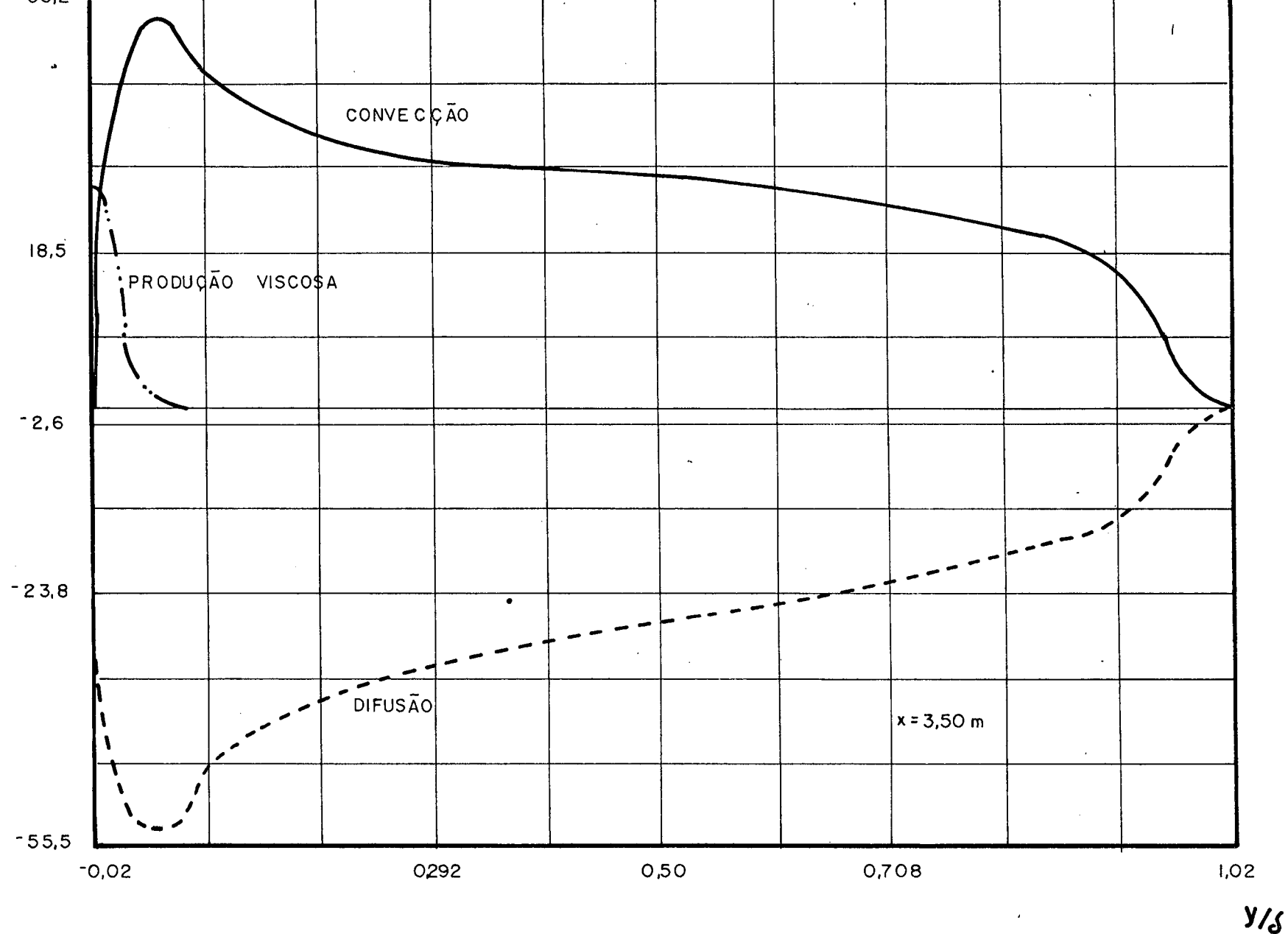


FIGURA 4.54 - BALANÇO TERMICO - CASO 1400 - FLUXO DE CALOR CONSTANTE NA PARE DE

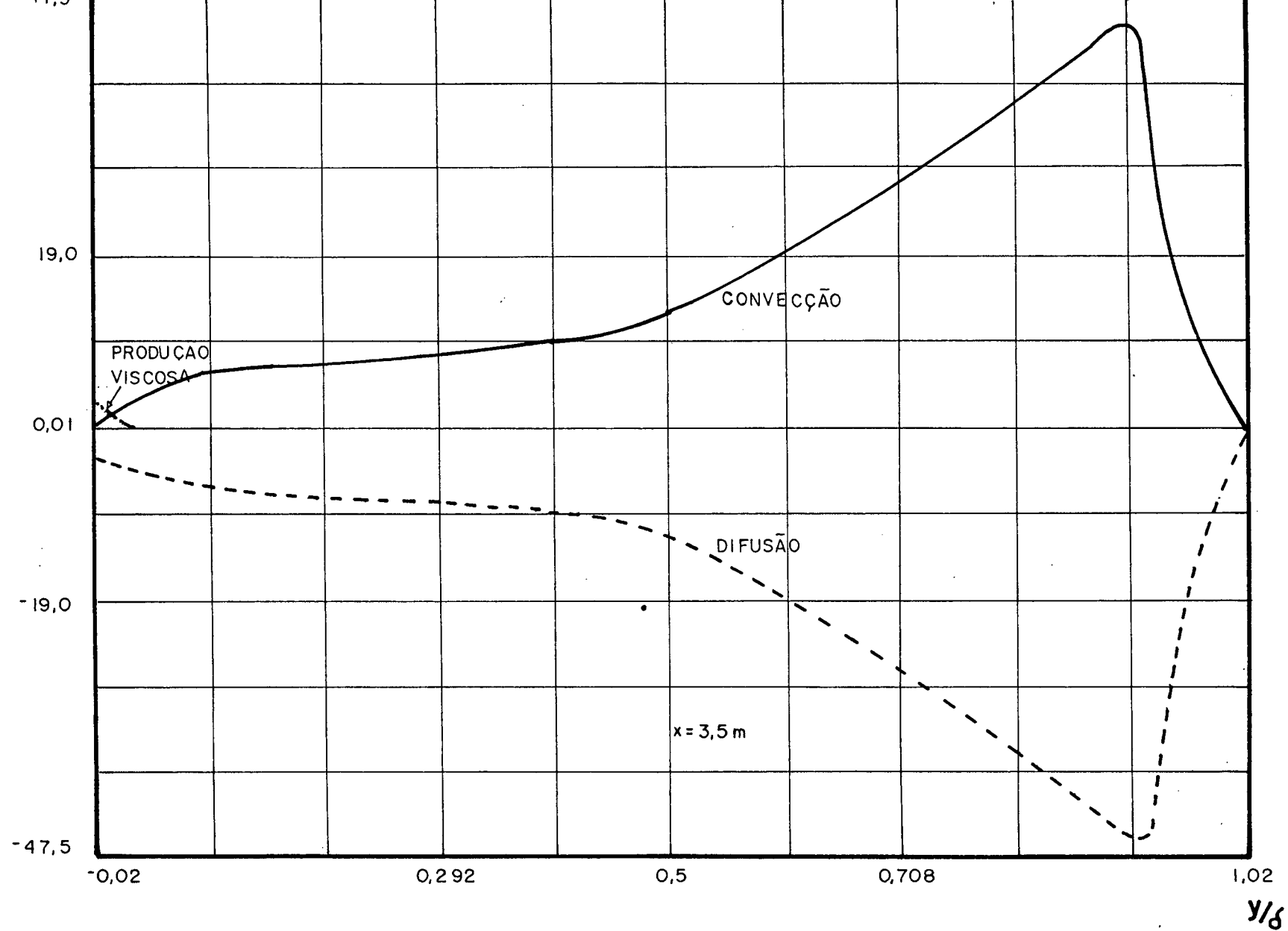


FIGURA 4.55 - BALANÇO TERMICO- CASO 1100 - TEMPERATURA NA PAREDE CONSTANTE

B(θ)

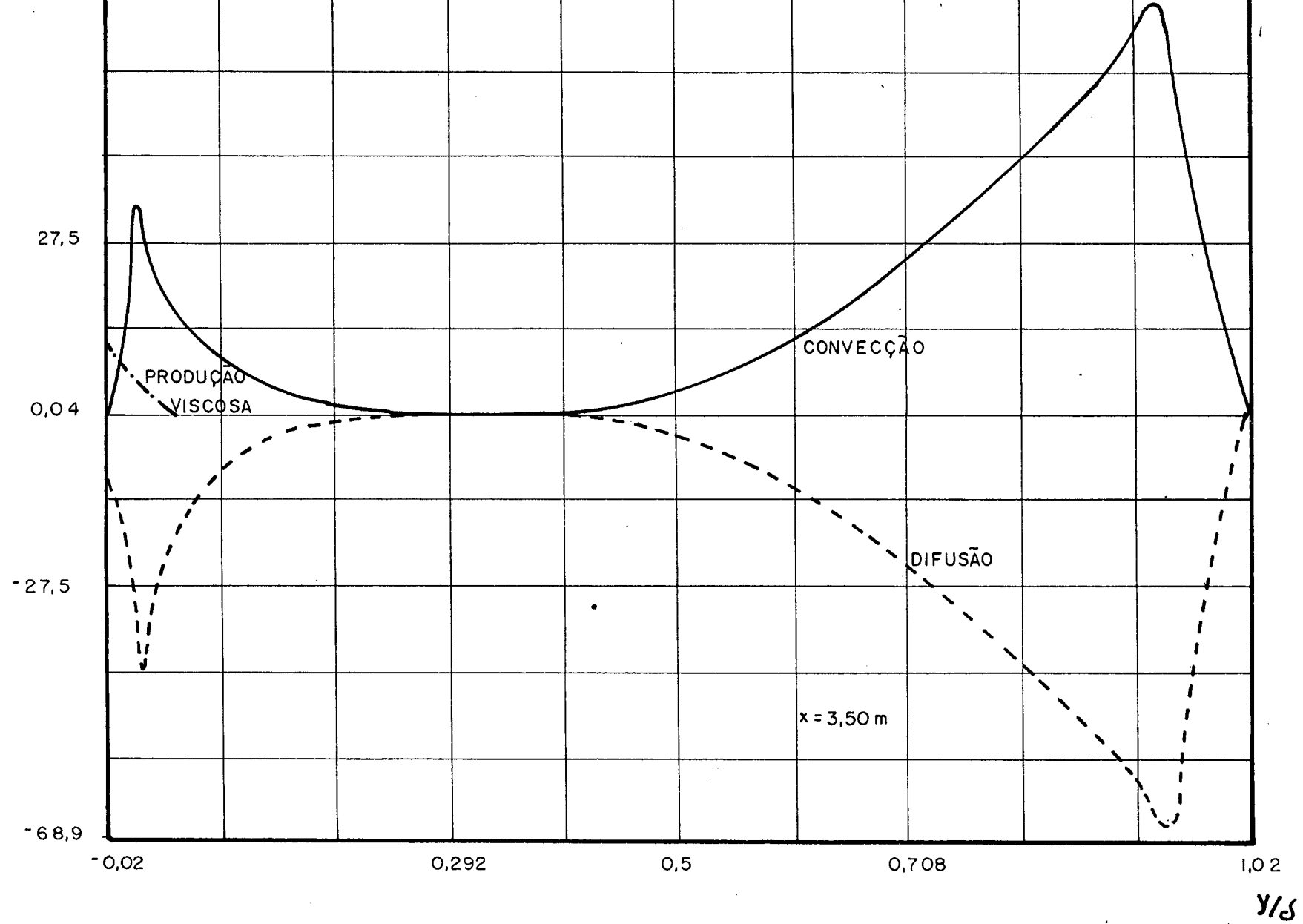


FIGURA 4.56 - BALANÇO TERMICO - CASO 1100 - FLUXO DE CALOR CONSTANTE NA PAREDE

$y/\delta > 0,5$ participa com uma maior quantidade de energia no balanço realizado.

4.10. RELAÇÃO ENTRE TEMPERATURA E VELOCIDADE

A relação entre os perfis de temperatura, θ , e de velocidade, u , segundo Schlichting (22), pode ser analisada com base nos parâmetros de gradiente de pressão e de fluxo de calor na parede, equações (4.19) e (4.20), respectivamente.

$$\Pi = \frac{\delta}{\tau_p} \frac{dp}{dx} \quad (4.19)$$

$$\Omega = \frac{2}{C_f} \frac{\delta}{q_p} \frac{dq_p}{dx} \quad (4.20)$$

Na figura 4.57 está plotada a relação entre temperatura e velocidade, quando $\Omega=0$, $\Pi < 0$, que apresentam o mesmo comportamento das relações obtidas em Schlichting (22), tendo como comparativo as curvas $u=\theta$, Curva do Crocco, e $\theta=u^2$.

Na figura 4.58 está plotada a relação entre temperatura e velocidade, quando $\Omega < 0$, para $\Pi < 0$, que apresentam o mesmo comportamento das relações obtidas em Schlichting (22).

Além disso, Schlichting (22) obtém o comportamento da analogia de Reynolds entre Stanton e Coeficiente de Fricção em função de Π e Ω , tal que, para $\Pi=0$, a solução do problema encontra $\gamma=1,35$ e Schlichting (22) encontra $\gamma=1,27$, isto é, um erro de 6%, para $\Omega=0$, a solução permite obter $\gamma=1,32$ e Schlichting (22) encontra $\gamma=1,22$, um erro de 8%, onde

$$\gamma = \frac{2 St}{C_f} \quad (4.21)$$

$\theta \times u$

LEGENDA

- · — $\theta = u$
- · — PLACA PLANA
- $\theta = u^2$
- X — GRAD. PRESSÃO
FAVORAVEL
- • — GRAD. PRESSÃO
ADVERSO

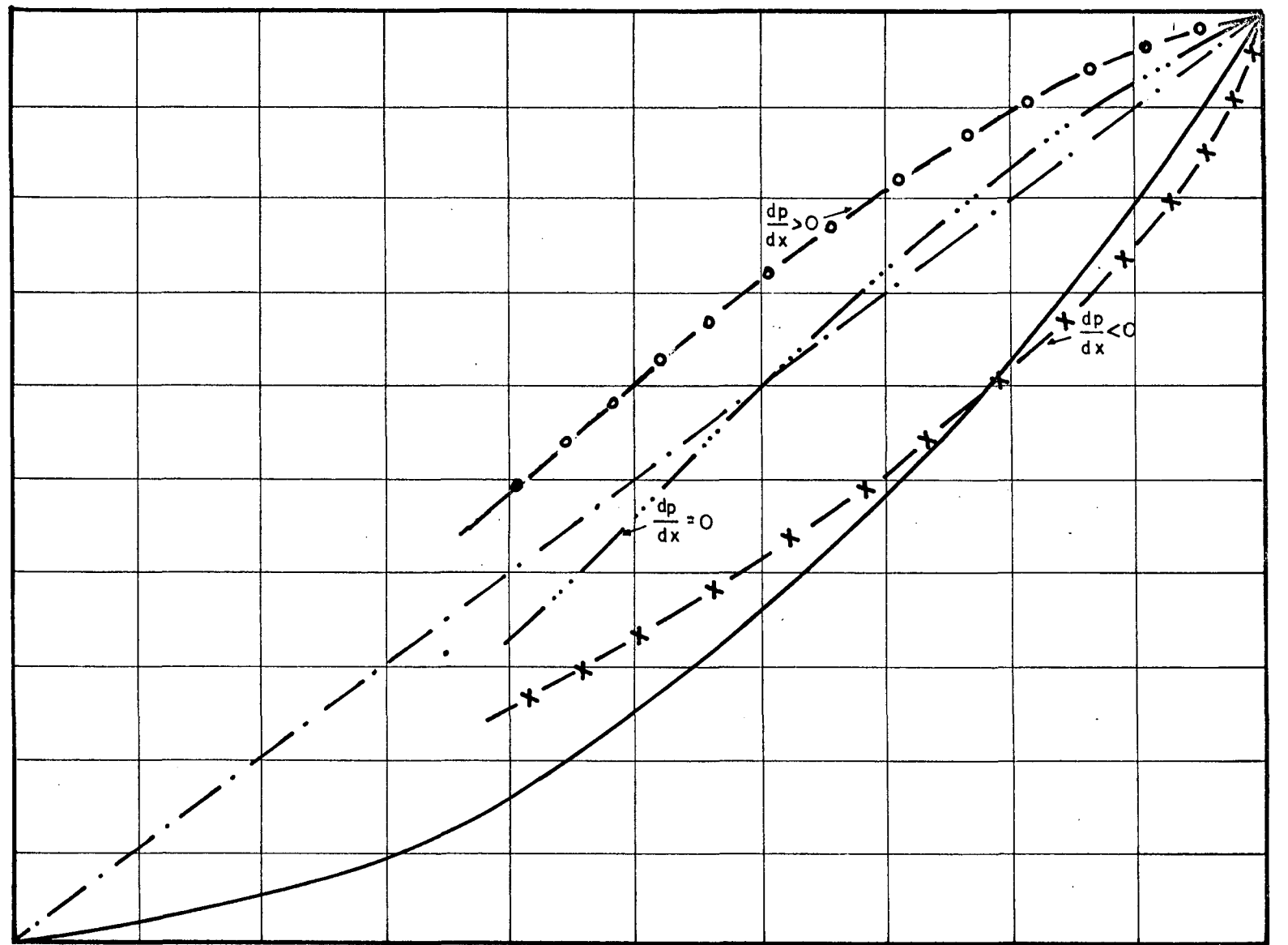
$T_p = \text{CONSTANTE}$

$x = 3,50 \text{ m}$

1,0

0,5

0



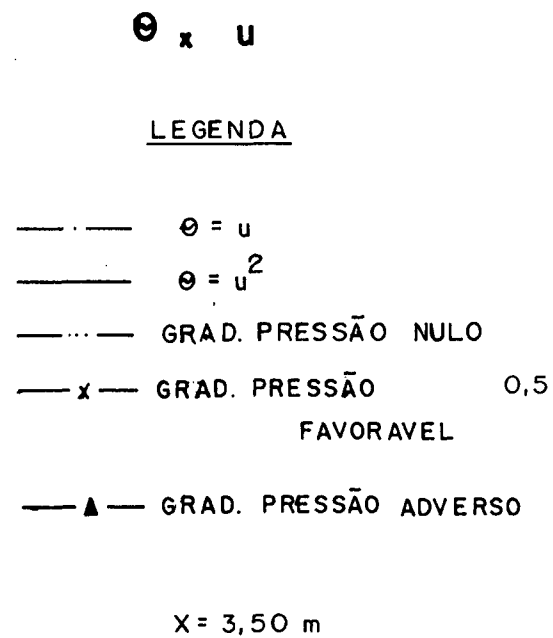
0

0,5

1,0

u

FIGURA 4.59 - TEMPERATURA x VELOCIDADE



FLUXO DE CALOR
NA PAREDE CONSTANTE

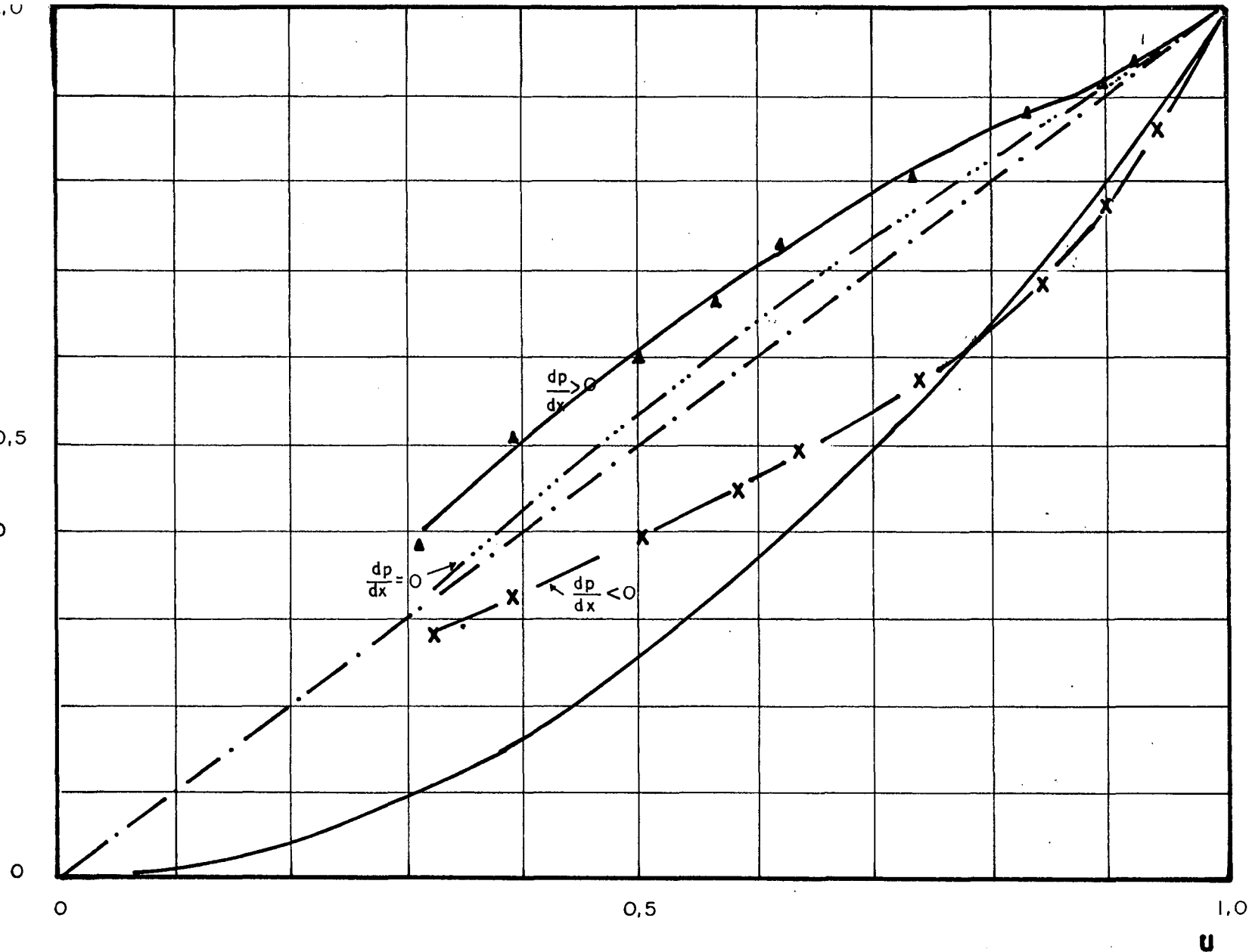


FIGURA 4.58 - TEMPERATURA x VELOCIDADE

C A P Í T U L O 5

CONCLUSÃO E SUGESTÕES

5.1. CONCLUSÃO

Após a análise dos resultados, realizada no capítulo 4, pode se dizer que a solução obtida pelo algoritmo numérico utilizado, quando comparada com valores experimentais, mostrou divergências dentro de uma faixa de erro que a torna aceitável.

O algoritmo numérico demonstrou ser apropriado para a solução de um sistema de equações cujas características são:

1. momentos de ordem superior das flutuações das variáveis do problema modelados em função de características médias do escoamento, através de gradientes de variáveis médias;
2. constantes utilizadas sendo obtidas em trabalhos publicados no mesmo campo de conhecimento mas com as simplificações impostas por seus autores, nem sempre tão apropriadas quanto o desejado;
3. viscosidade turbulenta obtida através de modelagem relacionando a energia cinética turbulenta com a sua taxa de dissipação;
4. coeficiente de difusão térmica turbulenta obtido por uma relação experimental;
5. equações simplificadas pela ordem de magnitude de seus termos, isto é, pelo grau de influência dos termos no

balanço realizado pela equação.

Com isto, o trabalho satisfaz seu objetivo na obtenção dos parâmetros e perfis que definem a camada limite térmica turbulenta, permitindo se obter, matematicamente, a expectativa de seu comportamento.

Isto torna possível a solução de problemas de escoamento turbulento, no que tange as distribuições de velocidade média, temperatura média, energia cinética turbulenta e sua taxa de dissipação.

O modelo numérico de simulação matemática da camada limite térmica turbulenta, tem sua aplicação na solução de problemas que envolvam fluxo de calor entre uma superfície e um fluido em escoamento, onde ocorram valores de número de Reynolds na ordem de 10^6 .

Este modelo permite se prever o comportamento da temperatura do fluido, as tensões superficiais que a parede impõe ao escoamento, a influência destas tensões sobre a velocidade do fluido ao longo do escoamento e a tensão turbulenta e sua influência no escoamento.

Isto origina um conjunto de perfis das variáveis do problema, de números característicos e de parâmetros auxiliares que mostram a tendência de comportamento da camada limite.

A inclusão da equação da energia no modelo de simulação numérica da camada limite, foi o acréscimo dado na linha de pesquisa.

Com isto, a obtenção dos perfis de temperatura e dos parâmetros que envolvem fluxo de calor, mereceram uma análise mais de

talhada.

5.2. SUGESTÕES

Dentro das limitações que um método numérico impõe, usando-se critérios de convergência em função da otimização do tempo de computação, escolhendo-se uma malha de computação $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$ em razão de se obter uma boa precisão, porém dentro de um tempo de computação aceitável, pode se sugerir a continuidade do presente trabalho, no sentido de aprimorar o método de solução usado, nos seguintes pontos:

1. usar critérios de convergência com maior precisão;
2. tornar menores os espaçamentos $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$, no sentido de se obter uma distribuição mais precisa das variáveis;
3. considerar no balanço realizado pelas equações um maior número de termos;
4. utilizar as equações na sua forma conservativa, quando for realizada a sua discretização, visto que, no presente trabalho, não foram usadas as formas conservativas.

Na obtenção do sistema de equações aplicado ao problema, onde certas constantes são obtidas de trabalhos publicados por outros autores, procurar novas fontes ou determiná-las experimentalmente, na medida do possível, aprimorar a expressão usada na obtenção da viscosidade turbulenta e desenvolver o algoritmo para outros fluidos em escoamento.

Com relação ao problema, torná-lo mais completo, adicionando às equações em estudo, uma equação para o transporte de massa,

a equação do transporte do tensor de Reynolds, tornando as propriedades função da temperatura ao longo do escoamento e transformá-lo para coordenadas generalizadas. Assim, seria possível a solução do problema do escoamento turbulento, não isotérmico, com transporte de massa, para uma superfície qualquer.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. AMES, W.F. Numerical Methods for Partial Differencial Equations. 2.ed. New York, Academic Press, 1977.
02. BECKWITH, I.E.; BUSHNELL, D.M. Calculation of Mean and Fluctuating Properties of the Incompressible Turbulent Boundary Layer. AFORS-IFP - Stanford Conference, 1968.
03. CARNAHAN, B.; WILKES, J.O. Digital Computing and Numerical Methods. 1.ed. New York, John Wiley and Sons, 1973.
04. CEBECI, T.; SMITH, A.M.O.; MOSINSKIS, G. Solution of the Incompressible Turbulent Boundary-Layer Equations with Heat Transfer. ASME - Journal of Heat Transfer, vol. 69, 1969.
05. DUTRA, J.C.C. Um Modelo em Diferenças Finitas para Calcular a Camada Limite Turbulenta em Superfícies Curvas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 1978.
06. FERREIRA, W.C.S. Modelo Matemático para a Solução da Camada Limite Turbulenta sobre Superfícies Curvas. Dissertação de Mestrado, UFSC, 1978.

07. HARLOW, F.H.; NAKAYAMA, P.I. Transport of Turbulence Energy Decay Rate. Los Alamos Scientific Laboratory, LA-3854, 1968.
08. HINZE, J.O. Turbulence. 2.ed. Mc-Graw-Hill, 1975.
09. JONES, W.P.; LAUNDER, B.E. The Calculation of low Reynolds-Number Phenomena with a two-Equations Model of Turbulence. Int. J. Heat Mass Transfer. vol.16, pp.1119-1130, 1973.
10. KAYS, W.M.; CRAWFORD, M.E. Convective Heat and Mass Transfer. 2.ed. New York. Mc-Graw-Hill, 1980.
11. KLINE, S.J.; MORKOVIN, M.V.; SOVRAN, G.; COCKRELL, D.J. Methods, Predictions, Evaluation and Flow Structure. Stanford Conference, 1968.
12. LAUNDER, B.E.; SPALDING, D.B. Mathematical Models of Turbulence. 1.ed. London, Academic Press, 1979.
13. LIMA, L.C. Camada Limite Turbulenta com Troca de Calor, Sobre Superfícies Curvas. Dissertação de Mestrado, UFSC, 1979.
14. LUDWIEG and TILLMANN Computation of Turbulent Boundary Layer, Stanford Conference, vol. II, 1968.

15. NICOLAU, V.P. Modelo Matemático para o Cálculo de Escoamento Turbulento Interno. Dissertação de Mestrado, UFSC, 1980.
16. NITSCHKE, W.; THÜNKER, R.; HABERLAND, C. Heat Transfer and Boundary-Layer Laws in Strongly Non-Adiabatic Turbulent Flows. Numerical Methods in Thermal Problems. vol. III, International Conference, Pineridge Press, 1983.
17. PATANKAR, S.V.; SPALDING, D.B. Heat and Mass Transfer in Boundary Layers. 2.ed. London. Intertext Books, 1970.
18. PEREIRA FILHO, H.V. A Four Equation Model for Numerical Solution of the Turbulent Boundary Layer. Tese de Doutorado - Universidade de Houston, USA, 1974.
19. ROGANOV, P.S.; SHISHOV, E.V.; LEONTIEV, A.I. Experimental Study of the Turbulent Heat Flux Balance Components in the Cross-Section of a Retarded Turbulent Boundary Layer. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 22, pp.1627-1630, 1979.
20. ROTTA, J.C. Turbulent Boundary Layers in Incompressible Flow. 2.ed. Pergamon Press, Oxford, 1962.
21. SCHLICHTING, H. Boundary Layer Theory. 6.ed. McGraw-Hill, 1968.

22. SCHLICHTING, H. Recent Progress in Boundary-Layer Research.
AIAA-Journal, vol. 12, nº 4, pp.427-440, 1974.
23. SPALDING, D.B.; RAMACHANDRA, V. Turbulent Flow and Heat
Transfer in Parallel-Rod Arrays: A Numerical Treatment.
Physico-Chemical Hydrodynamics, vol. 3, nº 1, pp.23-56,
1982.
24. SPALDING, D.B.; NG, K.H. Turbulence Model for Boundary
Layers Near Walls. The Physics of Fluids, vol. 15,
pp.20-30, 1970.
25. STANFORD CONFERENCE - EDITORS: COLES, D.E.; HIRST, E.A.
Computation of Turbulent Boundary Layers, vol. II,
Compiled Data, 1968.
26. VAN WYLEN, G.J.; SONNTAG, R.E. Fundamentos da Termodinâmi-
ca Clássica. 2.ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1978.
27. WELTY, J.R. Engineering Heat Transfer. 1.ed. New York,
John Wiley and Sons, 1978.
28. WHITE, F.M. Viscous Fluid Flow. Mc-Graw-Hill, 1974.
29. WIEGHARDT Computation of Turbulent Boundary Layer,
Stanford Conference, vol. II, 1968.

30. YEROSHENKO, V.M.; YERSHOV, A.V.; ZAICHIK, L.I. Heat Transfer for Turbulent Flow in a Circular Tube with Suction or Injection. Int. J. Heat Mass Transfer. vol. 27, n° 8, pp.1197-1203, 1984.
31. TAYLOR, JR. Temperature and Heat Flux Distribution in Incompressible Turbulent Equilibrium Boundary Layers. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, pp.2473-2488, 1972.
32. ZABOLOTSKY, V.P.; ROGANOV, P.S.; SHISHOV, E.V.; LEONTIEV, A.I. Some Aspects of Turbulent Heat Transfer in Accelerated Flows on Permeable Surfaces. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 27, N° 8, pp.1251-1259, 1984.
33. ANDERSEN, P.S.; KAYS, W.M.; MOFFAT, R.J. Experimental Results for the Transpired Turbulent Boundary Layer in an Adverse Pressure Gradient. J. Fluid Mechanics, vol. 69, parte 2, pp.353-375, 1975.
34. KLEBANOFF, P.S. Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient. Technical Note 3178, NACA, 1954.
35. CEBECI, T.; SMITH, A.M.O. Analysis of Turbulent Boundary Layers. 1°ed. New York, Academic Press, 1974.

A P Ê N D I C E A

ANÁLISE DA ORDEM DE MAGNITUDE

Na camada limite as escalas de comprimento L_1 equivalendo ao espaço percorrido em x e L_2 a espessura da mesma, são relacionadas por,

$$\frac{L_1}{L_2} \Rightarrow \frac{O(x)}{O(\delta)} \gg 1 \quad (\text{A.1})$$

Na figura A.1, tem-se um esquema destas escalas de comprimento.

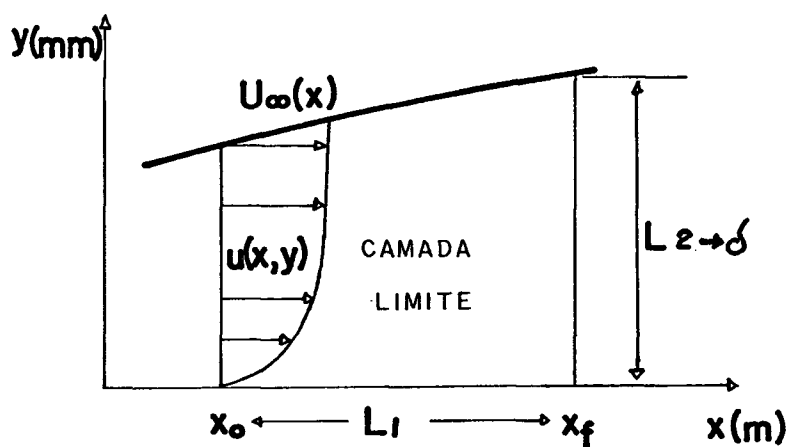


FIGURA A.1 - Escalas L_1 e L_2 na camada limite

Usando a equação de conservação da massa, (2.86) se obtém a seguinte relação entre as velocidades e as escalas de comprimento

$$\frac{\bar{u}}{L_1} \approx \frac{\bar{v}}{L_2} \quad (\text{A.2})$$

Na análise das equações do problema proposto, com respeito à grandeza de seus termos, alguns deles podem ser desconsiderados devido à pequena, quase nula, influência deles no cômputo geral de cada equação.

Esta análise será feita a seguir.

1. EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A equação de conservação da quantidade de movimento, por ser uma equação vetorial, para um escoamento bi-dimensional, tem duas componentes, conforme os eixos coordenados adotados para a formulação do problema. No presente trabalho, são eles, o eixo x , na direção do escoamento, e o eixo y , perpendicular a este. Estas componentes devem ser analisadas em separado, como segue.

1.1. QUANTIDADE DE MOVIMENTO SEGUNDO A DIREÇÃO DE ESCOAMENTO, EIXO x

A equação nesta direção é a equação (2.87), a qual será analisada a seguir.

Para se obter a ordem de grandeza dos termos desta equação, analisando o primeiro termo dela, como segue, usando as relações (A.1) e (A.2), se obtém,

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\bar{u} \bar{u}}{L_1} \quad (\text{A.3})$$

Esta expressão, ao ser multiplicada por L_1/\bar{u}^2 , fornece um termo de ordem unitária,

$$\bar{u} \frac{\bar{u}}{L_1} \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow 0(1) \quad . \quad (\text{A.4})$$

Com base nas relações (A.3) e (A.4), os outros termos da equação, com ordem de grandeza pequena relativa a unidade, podem ser desprezados, devido a sua pouca influência no balanço realizado pela equação. Assim, se obtém,

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow \bar{v} \frac{\bar{u}}{L_2} \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow 0(1) \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow \frac{\bar{\phi}}{L_1} \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow 0 \left(\frac{\bar{\phi}}{\bar{u}^2} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow v \frac{\bar{u}}{(L_1)^2} \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow 0 \left(\frac{v}{L_1 \bar{u}} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow \epsilon m \frac{\bar{u}}{(L_1)^2} \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow 0 \left(\frac{\epsilon m}{L_1 \bar{u}} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{q} \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow \frac{\bar{q}}{L_1} \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow 0 \left(\frac{\bar{q}}{\bar{u}^2} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow v \frac{\bar{u}}{L_2^2} \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow 0 \left(\frac{v}{\bar{u} L_1} \right) 0 \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow \epsilon m \frac{\bar{u}}{L_2^2} \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow 0 \left(\frac{\epsilon m}{\bar{u} L_1} \right) 0 \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow \varepsilon_m \frac{\bar{v}}{L_2 L_1} \frac{L_1}{\bar{u}^2} \Rightarrow 0 \left(\frac{\varepsilon_m}{\bar{u} L_1} \right) \quad (\text{A.12})$$

Atribuindo-se as variáveis em estudo as seguintes ordens de grandeza,

$O(1)$ - ordem unitária

$O(P)$ - ordem pequena

$O(G)$ - ordem grande

$O(M)$ - ordem média,

assim, as variáveis do problema em estudo tem as seguintes ordens de grandeza,

$$\bar{u} \rightarrow O(M), u_\infty \rightarrow O(M), \bar{v} \rightarrow O(P)$$

$$x \rightarrow O(G), \delta \rightarrow O(P), y \rightarrow O(P)$$

$$q \rightarrow O(P), \phi \rightarrow O(G), D \rightarrow O(P)$$

$$v \rightarrow O(P), \varepsilon_m \rightarrow O(P), \varepsilon_h \rightarrow O(P)$$

$$\alpha \rightarrow O(P), T \rightarrow O(M)$$

$$\text{onde } \alpha = k/\rho C_p \quad (\text{A.13})$$

Assim, a análise dos termos obtidos para a equação (2.87) resulta em que,

$$O(\text{A.6}) \Rightarrow O(1)$$

$$O(\text{A.7}) \approx O(\text{A.8}) \approx O(\text{A.12}) \Rightarrow O(PP)$$

$$O(\text{A.9}) \Rightarrow O(1)$$

$$O(\text{A.10}) \approx O(\text{A.11}) \Rightarrow O(1)$$

Aplicando-se as relações obtidas, se obtém a seguinte equação para o balanço de quantidade de movimento na direção x , em termos dos valores de ordem relevante,

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \epsilon m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]$$

1.2. QUANTIDADE DE MOVIMENTO SEGUNDO A DIREÇÃO DE ESCOAMENTO, EIXO y

A equação nesta direção é a equação (2.88), a qual será analisada a seguir. Realizando o mesmo trabalho já visto, dará,

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow \bar{u} \frac{\bar{u}}{L_1} \cdot \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow 0(1) \quad (\text{A.14})$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow \frac{\bar{v}^2}{L_2} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow \frac{\bar{v}L_1}{\bar{u}L_2} \Rightarrow 0(1) \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow \frac{\bar{\phi}}{L_2} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow 0 \left(\frac{\bar{\phi}}{\bar{v}^2} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow \frac{v\bar{v}}{L_1^2} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow 0 \left(\frac{v}{\bar{u}L_1} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow \frac{\epsilon m \bar{v}}{L_1^2} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow 0 \left(\frac{\epsilon m}{\bar{u}L_1} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow \frac{\epsilon m \bar{v}}{L_1 L_2} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow 0 \left(\frac{\epsilon m}{\bar{u}L_2} \right) \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow v \frac{\bar{v}}{L_2^2} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow 0 \left(\frac{v}{\bar{v}L_2} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow \epsilon m \frac{\bar{v}}{L_2^2} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow 0 \left(\frac{\epsilon m}{\bar{v}L_2} \right) \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \bar{q} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow \frac{\bar{q}}{L_2} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow 0 \left(\frac{\bar{q}}{\bar{v}^2} \right) \quad (\text{A.22})$$

Assim, a análise dos termos obtidos para a equação (2.88), resulta em que,

$$O(\text{A.16}) \Rightarrow O(G)$$

$$O(\text{A.17}) \sim O(\text{A.18}) \Rightarrow O(PP)$$

$$O(\text{A.19}) \sim O(\text{A.20}) \sim O(\text{A.21}) \Rightarrow O(1)$$

$$O(\text{A.22}) \Rightarrow O(G)$$

Com isto, os termos de maior influência no balanço da equação (2.88) devem se anular, tal que,

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.23})$$

A equação (A.23) integrada em relação a y , mostra que,

$$\bar{\phi} + \bar{q} = \bar{\phi}_0$$

Como na região externa a camada limite, $\bar{q} \rightarrow 0$, é usual de-

finir $\bar{\phi}_0$ como sendo a pressão na mesma seção da integral, porém fora da camada limite. Ao derivar a equação (A.24) com relação a x , se forma,

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x} \quad (\text{A.25})$$

Nesta equação, para um gradiente de \bar{q} na direção x pequeno, se obtém a equação (2.96),

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x}$$

Esta equação é o gradiente de pressão que aparece na equação (2.95).

2. EQUAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Tendo como base a equação (2.89), será realizada a análise da ordem de grandeza e portanto, seu grau de influência, dos termos do balanço de energia cinética turbulenta, aplicando-se o grupo $(L_1/\bar{q}\bar{u})$ para a obtenção de um termo de ordem unitária, usado como comparativo. Assim, da equação (2.89) se obtém,

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\bar{u}\bar{q}}{L_1} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow 0(1) \quad (\text{A.26})$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\bar{v}\bar{q}}{L_2} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow 0(1) \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \right) \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow \frac{v\bar{q}}{L_1^2} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow o \left(\frac{v}{L_1 \bar{u}} \right) \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \epsilon m \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \right) \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\epsilon m \bar{q}}{L_1^2} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow o \left(\frac{\epsilon m}{L_1 \bar{u}} \right) \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right) \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow \frac{v\bar{q}}{L_2^2} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow o \left(\frac{v}{L_1 \bar{u}} \right) o \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\theta \epsilon m \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right) \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\epsilon m \bar{q}}{L_2^2} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow o \left(\frac{\epsilon m}{L_1 \bar{u}} \right) o \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 \quad (\text{A.31})$$

$$2v\bar{D} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow o \left(\frac{v\bar{D}L_1}{\bar{q}\bar{u}} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$\epsilon m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\epsilon m \bar{u}^2}{L_2^2} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow o \left(\frac{\epsilon m \bar{u}}{\bar{q}L_1} \right) o \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 \quad (\text{A.33})$$

$$\epsilon m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\epsilon m \bar{u}\bar{v}}{L_1 L_2} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow o \left(\frac{\epsilon m \bar{u}}{\bar{q}L_1} \right) \quad (\text{A.34})$$

$$\epsilon m \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\epsilon m \bar{v}^2}{L_1^2} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow o \left(\frac{\epsilon m \bar{u}}{\bar{q}L_1} \right) o \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 \quad (\text{A.35})$$

$$\epsilon m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\epsilon m \bar{u}^2}{L_1^2} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow o \left(\frac{\epsilon m \bar{u}}{\bar{q}L_1} \right) \quad (\text{A.36})$$

$$\epsilon m \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\epsilon m \bar{v}^2}{L_2^2} \frac{L_1}{\bar{q}\bar{u}} \Rightarrow o \left(\frac{\epsilon m \bar{u}}{\bar{q}L_1} \right) \quad (\text{A.37})$$

Assim, a análise dos termos obtidos para a equação (2.89) resulta em que,

$$O(A.30) \sim O(A.31) \Rightarrow O(1)$$

$$O(A.32) \Rightarrow O(1)$$

$$O(A.33) \Rightarrow O(1)$$

$$O(A.34) \sim O(A.36) \sim O(A.37) \Rightarrow O(P)$$

$$O(A.35) \Rightarrow O(PP)$$

Aplicando-se as relações obtidas, se obtém a seguinte equação para o balanço de energia cinética turbulenta, em termos dos valores de ordem relevante,

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \epsilon m) \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right] - 2\nu \bar{D} + \epsilon m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (2.97)$$

3. EQUAÇÃO DA TAXA DE DISSIPACÃO

Tendo como base a equação (2.90), será realizada a análise da ordem de grandeza e portanto o grau de influência, dos termos do balanço da taxa de dissipação, aplicando-se o grupo $(L_1/\bar{u}\bar{D})$ para a obtenção de um termo de ordem unitária, usado como comparativo. Assim, da equação (2.90) se obtém,

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{D}}{\partial x} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{D}} \Rightarrow \bar{u} \frac{\bar{D}}{L_1} \frac{L_1}{\bar{u}\bar{D}} \Rightarrow O(1) \quad (A.38)$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{D}}{\partial y} \frac{L_1}{\bar{u} \bar{D}} \Rightarrow \frac{\bar{D} \bar{v}}{L_2} \frac{L_1}{\bar{u} \bar{D}} \Rightarrow o(1) \quad (\text{A.39})$$

$$2c_1 \frac{\bar{D}}{\bar{q}} \frac{L_1}{\bar{u} \bar{D}} \Rightarrow o\left(\frac{c_1 L_1}{\bar{q} \bar{u}}\right) \quad (\text{A.40})$$

$$2vc_2 \frac{\bar{D}^2}{\bar{q}} \frac{L_1}{\bar{u} \bar{D}} \Rightarrow o\left(\frac{v \bar{D} L_1}{\bar{q} \bar{u}}\right) \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c_3' \epsilon m \frac{\partial \bar{D}}{\partial x} \right) \frac{L_1}{\bar{u} \bar{D}} \Rightarrow \frac{\epsilon m \bar{D}}{L_1^2} \frac{L_1}{\bar{u} \bar{D}} \Rightarrow o\left(\frac{\epsilon m}{L_1 \bar{u}}\right) \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial \bar{D}}{\partial x} \right) \frac{L_1}{\bar{u} \bar{D}} \Rightarrow \frac{v \bar{D}}{L_1^2} \frac{L_1}{\bar{u} \bar{D}} \Rightarrow o\left(\frac{v}{L_1 \bar{u}}\right) \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(c_3' \epsilon m \frac{\partial \bar{D}}{\partial y} \right) \frac{L_1}{\bar{u} \bar{D}} \Rightarrow \frac{\epsilon m \bar{D}}{L_2^2} \frac{L_1}{\bar{u} \bar{D}} \Rightarrow o\left(\frac{\epsilon m}{L_1 \bar{u}}\right) o\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial \bar{D}}{\partial y} \right) \frac{L_1}{\bar{u} \bar{D}} \Rightarrow \frac{v \bar{D}}{L_2^2} \frac{L_1}{\bar{u} \bar{D}} \Rightarrow o\left(\frac{v}{L_1 \bar{u}}\right) o\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \quad (\text{A.45})$$

Assim, a análise dos termos obtidos para a equação (2.90) resulta em que,

$$o(\text{A.40}) \Rightarrow o(1)$$

$$o(\text{A.41}) \Rightarrow o(1)$$

$$o(\text{A.42}) = o(\text{A.43}) \Rightarrow o(P)$$

$$o(\text{A.44}) = o(\text{A.45}) \Rightarrow o(1)$$

A aplicação da ordem de (A.41) na equação, está efetuado na seção 2. Com isto, se obtém para o balanço da taxa de dissipação, os seguintes valores relevantes, na forma da equação que segue,

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(C'_3 \epsilon m + \nu) \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial y} \right] - 2C_1 \frac{\bar{\mathcal{D}}}{\bar{q}} \epsilon m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - 2\nu C_2 \frac{\bar{\mathcal{D}}^2}{\bar{q}} \quad (2.98)$$

4. EQUAÇÃO DA ENERGIA

Tendo como base (2.91), será realizada a análise da ordem de grandeza e portanto, do grau de influência, dos termos do balanço térmico na camada limite, aplicando-se o grupo $(L_1/\bar{u}\bar{T})$ para a obtenção de um termo de ordem unitária, usado como comparativo. Assim, da equação (2.91) se obtém,

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\bar{u}\bar{T}}{L_1} \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow O(1) \quad (A.46)$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\bar{v}\bar{T}}{L_2} \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow O(1) \quad (A.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon h' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\epsilon h \bar{T}}{L_1^2} \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow O\left(\frac{\epsilon h}{L_1 \bar{u}}\right) \quad (A.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\rho C_p} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow \frac{k \bar{T}}{\rho C_p L_1^2} \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow O\left(\frac{\alpha}{L_1 \bar{u}}\right) \quad (A.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon h \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow \frac{\epsilon h \bar{T}}{L_2^2} \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow O\left(\frac{\epsilon h}{L_1 \bar{u}}\right) O\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \quad (A.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\rho C_p} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow \frac{k\bar{T}}{\rho C_p L_2^2} \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow o \left(\frac{\alpha}{L_1 \bar{u}} \right) o \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{2\mu}{\rho C_p} \frac{L_1}{\bar{T}\bar{u}} \Rightarrow o \left(\frac{\nu L_1}{C_p \bar{T}\bar{u}} \right) \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x \partial x} \Rightarrow o \left(\frac{\bar{q}}{L_1^2} \right) \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial y \partial y} \Rightarrow o \left(\frac{\bar{q}}{L_2^2} \right) \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \Rightarrow o \left(\frac{\epsilon m \bar{u}}{L_1 L_2^2} \right) \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \Rightarrow o \left(\frac{\epsilon m \bar{v}}{L_2 L_1^2} \right) \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \Rightarrow o \left(\frac{\epsilon m \bar{u}}{L_1^3} \right) \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \Rightarrow o \left(\frac{\epsilon m \bar{v}}{L_2^3} \right) \quad (\text{A.58})$$

Assim, a análise dos termos obtidos para a equação (2.91) resulta em que,

$$O(A.48) \sim O(A.49) \Rightarrow O(P)$$

$$O(A.50) \sim O(A.51) \Rightarrow O(1)$$

associando as relações (A.52) com (A.53) à (A.58),

$$O(A.53) \Rightarrow O(P)$$

$$O(A.54) \Rightarrow O(1)$$

$$O(A.55) \sim O(A.58) \Rightarrow O(1)$$

$$O(A.56) \sim O(A.57) \Rightarrow O(P)$$

Aplicando-se as relações obtidas, se obtém a seguinte equação para o balanço térmico na camada limite, com os termos significativos de maior valor, a qual é,

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\alpha + \epsilon h) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + \frac{4\nu \bar{D}}{C_p} + \frac{2\nu}{C_p} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \\ \frac{4\nu}{C_p} \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial y \partial y} - \frac{2\nu}{C_p} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.99)$$

onde,

$$\alpha = k/\rho C_p \quad . \quad (A.59)$$

A P Ê N D I C E B

ANÁLISE DE PRODUTOS DE FLUTUAÇÃO

Na obtenção da equação da Energia Cinética Turbulenta, tem-se conforme a equação (2.32), o termo $(\overline{u'_j q' + u'_j \phi'})_{,j}$, que envolve produto de flutuações.

Na equação (2.63) tem-se um modelo para aproximar esta soma em função do gradiente médio da Energia Cinética Turbulenta.

Neste apêndice mostrar-se-á a validade de se assumir tal aproximação.

Do termo $(\overline{u'_j u'_i u'_i})_{,j}$, pode se obter

$$a) \quad (\overline{u'_j u'_i u'_i})_{,j} = \left[\overline{u'_j (u'_i u'_i)} \right]_{,j}$$

$$(\overline{u'_j u'_i u'_i})_{,j} = 2 (\overline{u'_j q'})_{,j} \quad (B.1)$$

$$b) \quad (\overline{u'_j u'_i u'_i})_{,j} = \left[\overline{(u'_j u'_i) u'_i} \right]_{,j}$$

$$(\overline{u'_j u'_i u'_i})_{,j} = \left[\overline{(2/3 q \delta_{ij} - \epsilon m e_{ij}) u'_i} \right]_{,j}$$

$$(\overline{u'_j u'_i u'_i})_{,j} = \left[\overline{(2/3 q \delta_{ij}) u'_i} \right]_{,j} - \left[\overline{(\epsilon m e_{ij}) u'_i} \right]_{,j}$$

$$(\overline{u'_j u'_i u'_i})_{,j} = 2 (\overline{u'_i q'})_{,i} - \left[\overline{(\epsilon m e_{ij}) u'_i} \right]_{,j} \quad (B.2)$$

Na equação (B.2) e_{ij} é expresso conforme a equação (2.62), tal que, obtém-se

$$\begin{aligned} \overline{(\epsilon m e_{ij}) u'_i},_j &= \overline{\{\epsilon m 0.5 [(\bar{u}_i + u'_i),_j + (\bar{u}_j + u'_j),_i] u'_i\}},_j \\ \overline{(\epsilon m e_{ij}) u'_i},_j &= 0.5 \left[\overline{\epsilon m (u'_i,{}_j u'_i + u'_j,{}_i u'_i)} \right],_j \end{aligned} \quad (B.3)$$

que, analisando termo a termo, obtêm-se,

$$u'_{i,j} u'_i = 0.5 (u'_i u'_i),_j$$

$$u'_{i,j} u'_i = q'_{i,j} \quad (B.4)$$

$$u'_{j,i} u'_i = (u'_j u'_i),_i$$

$$u'_{j,i} u'_i = (2/3 q' \delta_{ij} - \epsilon m e_{ij}),_i \quad (B.5)$$

tal que, a equação (B.3) se torna,

$$\begin{aligned} \overline{(\epsilon m e_{ij}) u'_i},_j &= 0.5 \left[\overline{\epsilon m q'_{i,j} + (2/3 q' \delta_{ij} - \epsilon m e_{ij}),_i \epsilon m} \right],_j \\ \overline{(\epsilon m e_{ij}) u'_i},_j &= 0.5 (\overline{\epsilon m q'_{i,j}}),_j + 0.5 \left[\overline{(2/3 q' \delta_{ij}),_i \epsilon m} \right],_j - 0.5 \left[\overline{(\epsilon m e_{ij}),_i \epsilon m} \right],_j \\ \overline{(\epsilon m e_{ij}) u'_i},_j &= 1/2 (\overline{\epsilon m q'_{i,j}}),_j + 1/3 (\overline{\epsilon m q'_{i,j}}),_j - 0.5 \left[\overline{(\epsilon m e_{ij}),_i \epsilon m} \right],_j \end{aligned} \quad (B.6)$$

substituindo (B.6) na equação (B.2), obtêm-se,

$$(u'_j u'_i u'_i),_j = 2 (\overline{u'_i q'}),_i - 5/6 (\overline{\epsilon m q'_{i,j}}),_j + 0.5 \left[\overline{(\epsilon m e_{ij}),_i \epsilon m} \right],_j \quad (B.7)$$

onde o termo $\left[\overline{(\epsilon m e_{ij}),_i \epsilon m} \right],_j$ é uma diferencial de ordem superior, que é considerada nula e, com isto,

$$(\overline{u'_j u'_i u'_i}),_j = 2\overline{u'_j q'},_j - 5/6(\overline{\epsilon m q'},_j),_j \quad (\text{B.8})$$

que é aproximada por $(\theta_1 \overline{\epsilon m q'},_j),_j$, tal que

$$(\overline{u'_j q'}),_j = -\theta_1 (\overline{\epsilon m q'},_j),_j \quad (\text{B.9})$$

Se for aproximado o termo de pressão $u'_j \phi'$, por uma diferença de velocidades e um gradiente de pressão, obtém-se,

$$u'_j \phi' = (u_1 - u_2) \Delta p \quad (\text{B.10})$$

onde $u_1 - u_2 = u'_j$ e $\Delta p = \Delta \phi' / \rho$, num determinado ponto. Se $\Delta p \neq 0 \rightarrow u_1 - u_2 \neq 0$, isto é, se ocorre diferença de pressão entre dois pontos no fluxo, ocorre um deslocamento de uma partícula entre os pontos com pressões diferentes e portanto uma flutuação de velocidade, tal que existe uma relação entre Δp e Energia Cinética Turbulenta. Assim, usa-se uma expressão que leve em consideração a influência da viscosidade turbulenta e o gradiente de energia cinética turbulenta na formação do movimento das partículas com o gradiente de pressão atuante, tal que,

$$\overline{u'_j \phi'} = -\theta_2 \overline{\epsilon m q'},_j \quad (\text{B.11})$$

Associando as equações (B.9) e (B.11) com a equação (2.63) obtém-se,

$$\overline{u'_j q'} + \overline{u'_j \phi'} = -\theta_1 \overline{\epsilon m q'},_j - \theta_2 \overline{\epsilon m q'},_j$$

ou seja,

$$\overline{u'_j q'} + \overline{u'_j \phi'} = -\theta_A \overline{\epsilon^m q},_j \quad (\text{B.12})$$

e,

$$(\overline{u'_j q'} + \overline{u'_j \phi'})_{,j} = -\theta_A (\overline{\epsilon^m q},_j)_{,j} \quad (\text{B.13})$$

onde $\theta_A \simeq 1$, segundo Pereira Filho (18).

A P Ê N D I C E C

ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Conforme as relações dadas nas equações (3.1) a (3.7), ao aplicá-las ao sistema formado pelas equações (2.94) a (2.99), e as hipóteses (2.81) e (2.82), obtém-se as equações adimensionais aplicáveis ao problema proposto.

1. CONSERVAÇÃO DA MASSA

Tendo como ponto de partida a equação (2.94), válida para o escoamento turbulento bidimensional, tem-se,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.1})$$

onde, com a relação (3.3) e a relação (3.4), obtém-se,

$$\frac{\partial u u_{\infty}(x)}{\partial x} + \frac{\partial v u_{\infty}(x)}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.2})$$

tal que,

$$u \frac{d u_{\infty}(x)}{dx} + u_{\infty}(x) \frac{\partial u}{\partial x} + u_{\infty}(x) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.3})$$

onde, para os termos derivados dos valores adimensionais da equação (C.3), u e v , tem-se

$$\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (\text{C.4})$$

onde

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{u_{\infty}(x)}{v} \quad (\text{C.5})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{y}{v} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_{\infty}}{(2\xi)^n} \right] \\ &= \frac{y}{v} \left\{ u_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{(2\xi)^n} \right] + \frac{1}{(2\xi)^n} \frac{\partial u_{\infty}}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{y}{(2\xi)^n v} \left[u_{\infty} (2\xi)^n \frac{(-n)\xi^{-(n+1)}}{2^n} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{du_{\infty}}{dx} \right] \\ &= \frac{y}{(2\xi)^n v} \left[\frac{du_{\infty}}{dx} - \frac{n u_{\infty}}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

onde, com (C.5) e,

$$\frac{du_{\infty}}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{du_{\infty}}{d\xi} \quad (\text{C.7})$$

pode se obter,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{y}{(2\xi)^n v} \left[\frac{u_{\infty}}{v} \frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{n u_{\infty}}{\xi} \frac{u_{\infty}}{v} \right] \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\eta}{v} \left[\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{n u_{\infty}}{\xi} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

com isto, a equação (C.4) será expressa como, após a análise do

termo derivado em x ,

$$\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{u_{\infty}}{v} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\eta}{v} \left[\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{nu_{\infty}}{\xi} \right] \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (C.9)$$

além disto,

$$\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (C.10)$$

onde,

$$\xi = f(x) \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

e,

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{u_{\infty}}{v(2\xi)^n}$$

tal que,

$$\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial y} = \frac{u_{\infty}}{v(2\xi)^n} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (C.11)$$

com as equações (C.7), (C.9) e (C.11) aplicadas na equação (C.3), tem-se, como forma adimensional,

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) \frac{u_{\infty}(\xi)}{v} \frac{du_{\infty}(\xi)}{d\xi} + u_{\infty}(\xi) \left\{ \frac{u_{\infty}(\xi)}{v} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \right. \\ \left. \frac{\eta}{v} \left[\frac{du_{\infty}(\xi)}{d\xi} - \frac{nu_{\infty}(\xi)}{\xi} \right] \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\} + \\ u_{\infty}(\xi) \left[\frac{u_{\infty}(\xi)}{(2\xi)^n v} \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right] = 0 \end{aligned} \quad (C.12)$$

reagrupando os termos de (C.12), é obtida a expressão,

$$\frac{u_{\infty}^2}{v(2\xi)^{2n}} \left\{ (2\xi)^{2n} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(2\xi)^{2n} u}{u_{\infty}} \frac{du_{\infty}}{d\xi} + \frac{\eta(\xi)^{2n}}{u_{\infty}} \left[\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{nu_{\infty}}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \right. \\ \left. (2\xi)^n \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\} = 0 \quad (C.13)$$

se, for definido V como uma relação entre u e v , na seguinte forma,

$$V = \frac{(2\xi)^{2n} u \eta}{u_{\infty}} \left[\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{nu_{\infty}}{\xi} \right] + (2\xi)^n v \quad (C.14)$$

sua derivada em relação a η , será,

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{(2\xi)^{2n} \eta}{u_{\infty}} \left[\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{nu_{\infty}}{\xi} \right] \frac{\partial u}{\partial \eta} + (2\xi)^n \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{(2\xi)^{2n} u}{u_{\infty}} \left[\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{nu_{\infty}}{\xi} \right]$$

esta equação pode ser reagrupada na seguinte forma,

$$\frac{(2\xi)^{2n} \eta}{u_{\infty}} \left[\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{nu_{\infty}}{\xi} \right] \frac{\partial u}{\partial \eta} + (2\xi)^n \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{(2\xi)^{2n} u}{u_{\infty}} \left[\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{nu_{\infty}}{\xi} \right] \quad (C.15)$$

Introduzindo a equação (C.15) na equação (C.13), obtém-se

$$(2\xi)^{2n} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(2\xi)^{2n} u}{u_{\infty}} \frac{du_{\infty}}{d\xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{(2\xi)^{2n} u}{u_{\infty}} \frac{du_{\infty}}{d\xi} + \frac{(2\xi)^{2n} u \eta}{\xi} = 0$$

ou seja,

$$(2\xi)^{2n} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(2\xi)^{2n} u n}{\xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{C.16})$$

esta equação, (C.16) é a equação da Conservação da Massa na forma adimensional.

2. CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Tendo como base a equação (2.95), será obtida a forma adimensional para a equação da conservação da quantidade de movimento.

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \epsilon m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (\text{C.17})$$

Analisando esta equação por partes, obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= u u_{\infty} \frac{\partial u u_{\infty}}{\partial x} + v u_{\infty} \frac{\partial u u_{\infty}}{\partial y} \\ &= u u_{\infty}^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 u_{\infty} \frac{d u_{\infty}}{d x} + v u_{\infty}^2 \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Substituindo na equação (C.18) as relações (C.7), (C.9) e (C.11), é obtida a expressão,

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_{\infty}^3}{v (2\xi)^{2n}} \left[u (2\xi)^{2n} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u^2 (2\xi)^{2n}}{u_{\infty}} \frac{d u_{\infty}}{d \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]. \quad (\text{C.19})$$

Para os termos do lado direito da igualdade, pode se obter,

$$-\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \epsilon m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \epsilon m) \frac{\partial u u_\infty}{\partial y} \right]$$

Com as relações conhecidas, obtêm-se,

$$-\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \epsilon m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = -\frac{u_\infty}{v} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \xi} + \frac{u_\infty^3}{v(2\xi)^{2n}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \frac{\epsilon m}{v}\right) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \quad (\text{C.20})$$

onde $\bar{\phi}_0 = f(x)$. Usando a equação da Conservação da Quantidade de movimento na direção x , quando y for maior que a espessura da camada limite, é obtida a expressão,

$$\lim_{y \rightarrow \delta} \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = u_\infty \frac{du_\infty}{dx} \quad (\text{C.21})$$

$$\lim_{y \rightarrow \delta} \left\{ -\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \epsilon m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \right\} = -\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x} \quad (\text{C.22})$$

com as relações vistas, (C.21) e (C.22)

$$u_\infty \frac{du_\infty}{dx} = -\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial x}$$

ou seja,

$$-\frac{u_\infty}{v} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \xi} = \frac{u_\infty^2}{v} \frac{du_\infty}{d\xi} \quad (\text{C.23})$$

Substituindo a equação (C.23) em (C.20), seu resultado e a equação (C.19) em (C.17), reagrupando os termos, é obtida a forma adi

mensional desejada para a equação (2.95).

$$u(2\xi)^{2n} \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \frac{\epsilon m}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \frac{(2\xi)^{2n}}{u_\infty} (1-u^2) \frac{du_\infty}{d\xi} \quad (\text{C.24})$$

3. ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Tendo como base a equação (2.97),

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \epsilon m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \theta \epsilon m) \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right] - 2v\bar{D} \quad (\text{C.25})$$

será obtida a forma adimensional da equação da energia cinética turbulenta. A análise, por partes, permite obter, do lado esquerdo da equação,

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} &= u u_\infty \frac{\partial q u_\infty^2}{\partial x} + v u_\infty \frac{\partial q u_\infty^2}{\partial y} \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} &= u u_\infty^3 \frac{\partial q}{\partial x} + 2u u_\infty^2 q \frac{\partial u_\infty}{\partial x} + v u_\infty^3 \frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

aplicando em (C.26) as relações (C.9) e (C.11), é obtida a expressão,

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \frac{u_\infty^4}{v(2\xi)^{2n}} \left[u(2\xi)^{2n} \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{2u(2\xi)^{2n} q}{u_\infty} \frac{du_\infty}{d\xi} + v \frac{\partial q}{\partial \eta} \right]. \quad (\text{C.27})$$

Para os termos do lado direito da igualdade, são obtidas as expressões,

$$\epsilon m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \epsilon m \left(\frac{\partial u u_\infty}{\partial y} \right)^2$$

$$\epsilon m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \frac{u_\infty^4}{v(2\xi)^{2n}} \frac{\epsilon m}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \quad (\text{C.28})$$

$$2v\bar{D} = 2v \frac{u_\infty^4 D}{v^2}$$

$$2v\bar{D} = \frac{2u_\infty^4 D}{v} \quad (\text{C.29})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \theta \epsilon m) \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \theta \epsilon m) \frac{\partial q u_\infty^2}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \theta \epsilon m) \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right] = \frac{u_\infty^4}{v(2\xi)^n} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \theta \frac{\epsilon m}{v} \right) \frac{\partial q}{\partial \eta} \right] \quad (\text{C.30})$$

Substituindo na equação (C.25) os termos adimensionais (C.27), (C.28), (C.29) e (C.30), obtêm-se a equação adimensional que segue,

$$u(2\xi)^{2n} \frac{\partial q}{\partial \xi} + v \frac{\partial q}{\partial \eta} = \frac{\epsilon m}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{2uq(2\xi)^{2n}}{u_\infty} \frac{du_\infty}{d\xi} +$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \theta_A \frac{\epsilon m}{v} \right) \frac{\partial q}{\partial \eta} \right] - 2(2\xi)^{2n} D \quad (\text{C.31})$$

4. TAXA DE DISSIPACÃO

Tendo como base a equação (2.98), será obtida a forma adimensional para a equação da taxa de dissipação,

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + C'_3 \varepsilon m) \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial y} \right] - 2vC_2 \frac{\bar{\mathcal{D}}^2}{\bar{q}} - 2C_1 \frac{\bar{\mathcal{D}}}{\bar{q}} \varepsilon m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (C.32)$$

Analisando esta equação por partes, obtém-se, para o lado esquerdo, a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial y} &= u u_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_\infty^4 \mathcal{D}}{v^2} \right) + v u_\infty \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_\infty^4 \mathcal{D}}{v^2} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial y} &= \frac{u u_\infty^5}{v^2} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x} + \frac{u u_\infty \mathcal{D}}{v^2} \frac{u_\infty^4}{\partial x} + \frac{v u_\infty^5}{v^2} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (C.33)$$

Aplicando em (C.33) as relações (C.7), (C.9) e (C.11), é obtida a expressão,

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial y} &= \frac{u_\infty^6}{v^3 (2\xi)^{2n}} \left[(2\xi)^{2n} u \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \eta} + \right. \\ &\quad \left. \frac{4u\mathcal{D}(2\xi)^{2n}}{u_\infty} \frac{du_\infty}{d\xi} \right] \end{aligned} \quad (C.34)$$

Para os termos do lado direito, da igualdade, são obtidas as expressões,

$$2\nu C_2 \frac{\bar{D}^2}{q} = 2\nu C_2 \left(\frac{u_\infty^4 \mathcal{D}}{\nu^2} \right)^2 \frac{1}{q u_\infty^2}$$

$$2\nu C_2 \frac{\bar{D}^2}{q} = 2C_2 \frac{u_\infty^6}{\nu^3} \frac{\mathcal{D}^2}{q} \quad (C.35)$$

$$2C_1 \frac{\bar{D}}{q} \varepsilon m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = 2C_1 \frac{u_\infty^4 \mathcal{D}}{\nu^2} \frac{1}{q u_\infty^2} \varepsilon m \left(\frac{\partial u u_\infty}{\partial y} \right)^2$$

$$2C_1 \frac{\bar{D}}{q} \varepsilon m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \frac{2C_1 u_\infty^6 \mathcal{D}}{\nu^3 (2\xi)^{2n} q} \frac{\varepsilon m}{\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \quad (C.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + C'_3 \varepsilon m) \frac{\partial \bar{D}}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + C'_3 \varepsilon m) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_\infty^4 \mathcal{D}}{\nu^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + C'_3 \varepsilon m) \frac{\partial \bar{D}}{\partial y} \right] = \frac{u_\infty^6}{\nu^3 (2\xi)^{2n}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + C'_3 \frac{\varepsilon m}{\nu} \right) \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \eta} \right] \quad (C.37)$$

Substituindo na equação (C.32) os termos adimensionais (C.34), (C.35), (C.36) e (C.37), obtêm-se a equação adimensional que segue,

$$u(2\xi)^{2n} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + C'_3 \frac{\varepsilon m}{\nu} \right) \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \eta} \right] - 2C_1 \frac{\mathcal{D}}{q} \frac{\varepsilon m}{\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 -$$

$$2C_2 (2\xi)^{2n} \frac{\mathcal{D}^2}{q} - \frac{4u\mathcal{D}(2\xi)^{2n}}{u_\infty} \frac{du_\infty}{d\xi} \quad (C.38)$$

5. EQUAÇÃO DA ENERGIA

Tendo como base a equação (2.99), será obtida a forma adimensional para a equação da energia,

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\alpha + \epsilon h) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + \frac{4\mu \bar{D}}{\beta} + \frac{2\mu}{\beta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \\ \frac{4\mu}{\beta} \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial y} - \frac{2\mu}{\beta} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} \left(\epsilon m \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (C.39)$$

Analisando esta equação por partes, é obtido para o lado esquerdo, a seguinte expressão, sabendo que,

$$\theta = \frac{\bar{T} - T_p}{T_\delta - T_p} \quad (C.40)$$

ou seja,

$$\bar{T} = \theta (T_\delta - T_p) + T_p \quad (C.41)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = u u_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left[\theta (T_\delta - T_p) + T_p \right] + v u_\infty \frac{\partial}{\partial y} \left[\theta (T_\delta - T_p) + T_p \right]. \quad (C.42)$$

Aplicando em (C.42) as relações (C.9) e (C.11), obtêm-se

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{u_{\infty}^2 (T_{\delta} - T_p)}{v (2\xi)^{2n}} \left[\frac{u \theta (2\xi)^{2n}}{(T_{\delta} - T_p)} \left[\frac{dT_{\delta}}{d\xi} - \frac{dT_p}{d\xi} \right] + \right. \\ \left. \frac{u (2\xi)^{2n}}{(T_{\delta} - T_p)} \frac{dT_p}{d\xi} + u (2\xi)^{2n} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] \quad (C.43)$$

Para os termos do lado direito da igualdade, são obtidas as expressões,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\alpha + \varepsilon h) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\alpha + \varepsilon h) \frac{\partial}{\partial y} \left[\theta (T_{\delta} - T_p) + T_{\delta} \right] \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\alpha + \varepsilon h) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] = \frac{u_{\infty}^2 (T_{\delta} - T_p)}{v (2\xi)^{2n}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{\alpha}{v} + \frac{\varepsilon h}{v} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] \quad (C.44)$$

$$\frac{4\mu \bar{D}}{\beta} = \frac{4\mu}{\rho C_p} \frac{\mathcal{D} u_{\infty}^4}{v^2} \\ \frac{4\mu \bar{D}}{\beta} = \frac{4u_{\infty}^4 \mathcal{D}}{C_p v} \quad (C.45)$$

$$\frac{2\mu}{\beta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \frac{2\mu}{\rho C_p} \left(\frac{\partial u u_{\infty}}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{2\mu}{\beta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \frac{2u_{\infty}^4}{C_p v (2\xi)^{2n}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \quad (C.46)$$

$$\frac{4\mu}{\beta} \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial y \partial y} = \frac{4u^4}{C_p v (2\xi)^{2n}} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta \partial \eta} \quad (C.47)$$

$$\frac{2\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\epsilon m \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] \right] = \frac{2u_{\infty}^4}{Cp\nu(2\xi)^{3n}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\epsilon m}{\nu} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \right] \quad (C.48)$$

$$\frac{2\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\epsilon m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \right] = \frac{2\mu}{\rho Cp} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_{\infty}^3}{\nu(2\xi)^{2n}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\epsilon m}{\nu} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \right]$$

chamado de $F(\xi, \eta)$ a expressão seguinte, é obtida a expressão para o termo acima citado na forma,

$$F(\xi, \eta) = \frac{\epsilon m}{\nu} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{2\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\epsilon m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \right] = \frac{2u_{\infty}^4}{Cp\nu(2\xi)^{2n}} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2u_{\infty}^3}{Cp\nu(2\xi)^{2n}}$$

$$\left(\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{nu_{\infty}}{\xi} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \eta} + \frac{6u_{\infty}^3}{Cp\nu(2\xi)^{2n}} \left(\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{2nu_{\infty}}{3\xi} \right) \frac{\partial F}{\partial \eta} \quad (C.49)$$

substituindo em (C.39) os termos adimensionais (C.43), (C.44), (C.45), (C.46), (C.47), (C.48) e (C.49), obtém-se a equação adimensional que segue,

$$\begin{aligned} u(2\xi)^{2n} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\epsilon h}{\nu} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] - \frac{u\theta(2\xi)^{2n}}{(T_{\delta} - T_p)} \left[\frac{dT_{\delta}}{d\xi} - \frac{dT_p}{d\xi} \right] - \\ &\frac{u(2\xi)^{2n}}{(T_{\delta} - T_p)} \frac{dT_p}{d\xi} + \frac{4u_{\infty}^2(2\xi)^{2n}\mathcal{D}}{Cp(T_{\delta} - T_p)} + \frac{2u_{\infty}^2}{Cp(T_{\delta} - T_p)} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{4u_{\infty}^2}{Cp(T_{\delta} - T_p)} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta \partial \eta} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2u_{\infty}^2}{Cp(T_f - T_p)(2\xi)^n} \frac{\partial^2 P}{\partial \eta \partial \eta} - \frac{2u_{\infty}^2}{Cp(T_f - T_p)} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2u_{\infty}}{Cp(T_f - T_p)} \left(\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{nu_{\infty}}{\xi} \right) \\
& \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \eta} - \frac{6u_{\infty}}{Cp(T_f - T_p)} \left(\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{2nu_{\infty}}{3\xi} \right) \frac{\partial F}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{C.50}$$

onde,

$$F(\xi, \eta) = \frac{\varepsilon m}{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} \tag{C.51}$$

$$P(\xi, \eta) = \frac{\varepsilon m}{v} \frac{\partial v}{\partial \eta} \tag{C.52}$$

6. HIPÓTESES

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon m}{v} &= A \left(\frac{u_* y}{v} \right)^2 \\
\frac{\varepsilon m}{v} &= A \left(\frac{u_* (2\xi)^n}{u_{\infty}} \eta \right)^2
\end{aligned} \tag{C.53}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon m}{v} &= \left[a \left(\frac{u_* y}{v} \right) + b \right] \frac{\bar{q}^2}{v^{\frac{2}{D}}} \\
\frac{\varepsilon m}{v} &= \left[a \left(\frac{u_* (2\xi)^n}{u_{\infty}} \right) \eta + b \right] \frac{q^2}{D}
\end{aligned} \tag{C.54}$$

$$\frac{\varepsilon h}{v} = \frac{\varepsilon m}{v P h_t} \tag{C.55}$$

A P Ê N D I C E D

DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Para simplificar as equações, serão usadas as seguintes expressões

$$EM = 1 + \frac{\varepsilon m}{v} \quad (D.1)$$

$$EQ = 1 + \frac{\theta \varepsilon m}{v} \quad (D.2)$$

$$ED = 1 + \frac{C'_3 \varepsilon m}{v} \quad (D.3)$$

$$EH = \frac{\alpha}{v} + \frac{\varepsilon h}{v} \quad (D.4)$$

$$CSI = (2 \xi)^{2n} \quad (D.5)$$

$$CS11 = (2 \xi)^n \quad (D.6)$$

$$EVIS = \frac{\varepsilon m}{v} \quad (D.7)$$

$$PD = C_1 \frac{\varepsilon m D}{v q} \quad (D.8)$$

$$DD = 2C_2 \frac{D^2}{q} \quad (D.9)$$

$$PRES = \frac{CSI}{u_{\infty}} \frac{du_{\infty}}{d\xi} \quad (D.10)$$

$$DQ = 2CSI \, D \quad (D.11)$$

$$DDD = 4uD \quad (D.12)$$

$$PRM = (1 - u^2) PRES \quad (D.13)$$

$$DTEM = T_{\delta} - T_p \quad (D.14)$$

$$EC = \frac{u_{\infty}^2}{C_p DTEM} \quad (D.15)$$

$$EE = \frac{uCSI}{DTEM} \quad (D.16)$$

Estas expressões formam o conjunto de coeficientes das equações do sistema em estudo.

Com o uso destas expressões e com as relações dadas pelas equações (3.27) a (3.33), serão analisadas as expressões que seguem.

1. CONSERVAÇÃO DA MASSA

Tendo por base a equação adimensional (3.8), é obtida a expressão,

$$CSI \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{CSI n}{\xi} u + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (D.17)$$

que, será discretizada para um ponto $(i+1/2, j)$, resultando em,

$$CSI_{i+1/2, j} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_{i+1/2, j} + \frac{CSI n}{\xi} \left[u_{i+1/2, j} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right]_{i+1/2, j} = 0 \quad (D.18)$$

analisando cada termo da equação (D.18), segundo as expressões (3.27), (3.29) e (3.30), tem-se

$$CSI_{i+1/2, j} \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{i+1/2, j} = \frac{1}{2} \left(CSI_{i, j} + CSI_{i+1, j} \right) \left[\frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{\Delta \xi} \right] \quad (D.19)$$

$$\frac{CSI n}{\xi} \Big|_{i+1/2, j} u_{i+1/2, j} = \frac{\frac{1}{2} (CSI_{i, j} + CSI_{i+1, j}) n}{\frac{1}{2} (\xi_{i, j} + \xi_{i+1, j})} \cdot \frac{1}{2} (u_{i, j} + u_{i+1, j}) \quad (D.20)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2, j} = \frac{1}{2} \left[\frac{V_{i+1, j+1} - V_{i+1, j-1}}{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}} + \frac{V_{i, j+1} - V_{i, j-1}}{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}} \right] \quad (D.21)$$

substituindo estes termos na equação (D.18) e agrupando em termos de $V_{i+1, j+1}$ e $V_{i+1, j-1}$, obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} V_{i+1, j+1} - \frac{1}{2(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} V_{i+1, j-1} &= - \frac{CSI_{i, j} + CSI_{i+1, j}}{2} \\ \left(\frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{\Delta \xi} \right) - \frac{(CSI_{i, j} + CSI_{i+1, j}) n}{(\xi_{i, j} + \xi_{i+1, j})} \left(\frac{u_{i, j} + u_{i+1, j}}{2} \right) &- \frac{1}{2} \left[\frac{V_{i, j+1} - V_{i, j-1}}{\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1}} \right] \end{aligned} \quad (D.22)$$

conhecidos os perfis anteriores, isto é, em (i, j) e calculado o perfil $u_{i+1, j}$, através de sucessivas iterações entre as equações de Conservação de Massa e da Quantidade de Movimento, os termos a direita da equação serão um valor conhecido, tal que,

$$AMJ \, v_{i+1, j+1} + CMJ \, v_{i+1, j-1} = DMJ \quad (D.23)$$

Portanto, o perfil do valor adimensional v será obtido pela expressão,

$$v_{i+1, j+1} = \frac{DMJ - CMJ \, v_{i+1, j-1}}{AMJ} \quad (D.24)$$

onde, pelas condições de contorno na parede,

$$v_{i+1, 1} = 0 \quad (D.25)$$

2. CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Tendo por base a equação adimensional (3.9), é obtida a expressão,

$$CSI u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[EM \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + PRM \quad (D.26)$$

Esta equação, sendo discretizada para um ponto $(i+1/2, j)$, e analisada termo a termo, permite obter,

$$CSI_{i+1/2, j} \, u_{i+1/2, j} \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{i+1/2, j} = \frac{(CSI_{i, j} + CSI_{i+1, j}) (u_{i, j} + u_{i+1, j})}{4} \left[\frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{\Delta \xi} \right] \quad (D.27)$$

$$\left[\frac{V_{i+1/2,j}}{\frac{\partial u}{\partial \eta}} \right]_{i+1/2,j} = \frac{(V_{i,j} + V_{i+1,j})}{4} \left[\frac{(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1})}{(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \right] \quad (D.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(EM \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{i+1/2,j} &= \frac{EM_{i+1/2,j+1/2} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{EM_{i+1/2,j-1/2} (u_{i+1,j})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \\ &+ \frac{EM_{i+1/2,j+1/2} (u_{i,j+1} - u_{i,j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{EM_{i+1/2,j-1/2} (u_{i,j} - u_{i,j-1})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \end{aligned} \quad (D.29)$$

$$PRM_{i+1/2,j} = \frac{(PRM_{i+1,j} + PRM_{i,j})}{2} \quad (D.30)$$

Substituindo os termos na equação (D.26), reagrupando em termos de $u_{i+1,j}$, sabendo que os termos no ponto (i,j) já estão determinados, cujo somatório será chamado de \mathcal{DJ} , obtém-se

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(V_{i,j} + V_{i+1,j})}{4(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{EM_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \right] u_{i+1,j+1} + \left[\frac{(CSI_{i,j} + CSI_{i+1,j})}{2} \right. \\ &\left. \frac{(u_{i+1,j} + u_{i,j})}{2\Delta \xi} \right] + \frac{EM_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} + \frac{EM_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \left. \right] u_{i+1,j} + \\ &\left[\frac{-(V_{i,j} + V_{i+1,j})}{4(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{EM_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \right] u_{i+1,j-1} = \mathcal{DJ} \end{aligned} \quad (D.31)$$

de uma forma mais simplificada, conhecidos os valores multiplicativos dos $u_{i,j}$, a equação (D.31) pode ser escrita na seguinte forma,

$$AJ u_{i+1,j+1} + BJ u_{i+1,j} + CJ u_{i+1,j-1} = DJ \quad (D.32)$$

3. ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Tendo por base a equação adimensional (3.10), é obtida a expressão,

$$CSIU \frac{\partial q}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial q}{\partial \eta} = EVIS \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 - 2uqPRES - DQ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(EQ \frac{\partial q}{\partial \eta} \right) \quad (D.33)$$

Esta equação, sendo discretizada para um ponto $(i+1/2, j)$, e analisada termo a termo, permite obter,

$$CSI_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j} \frac{\partial q}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2,j} = \frac{(CSI_{i,j} + CSI_{i+1,j}) (u_{i,j} + u_{i+1,j})}{4} \left[\frac{(q_{i+1,j} - q_{i,j})}{\Delta \xi} \right] \quad (D.34)$$

$$\nu_{i+1/2,j} \frac{\partial q}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2,j} = \frac{(\nu_{i+1,j} + \nu_{i,j})}{4} \left[\frac{(q_{i+1,j+1} - q_{i+1,j-1} + q_{i,j+1} - q_{i,j-1})}{(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \right] \quad (D.35)$$

$$2u_{i+1/2,j} PRES_{i+1/2,j} q_{i+1/2,j} = \frac{1}{4} \left[(u_{i,j} + u_{i+1,j}) (PRES_{i,j} + PRES_{i+1,j}) (q_{i+1,j} + q_{i,j}) \right] \quad (D.36)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \eta} \left(EQ \frac{\partial q}{\partial \eta} \right)_{i+1/2,j} &= \frac{EQ_{i+1/2,j+1/2} (q_{i+1,j+1} - q_{i+1,j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{EQ_{i+1/2,j-1/2} (q_{i+1,j} - q_{i,j})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \\
&+ \frac{EQ_{i+1/2,j+1/2} (q_{i,j+1} - q_{i,j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{EQ_{i+1/2,j-1/2} (q_{i,j} - q_{i,j-1})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \quad (D.37)
\end{aligned}$$

Substituindo os termos na equação (D.33), reagrupando em termos de $q_{i+1,j}$, sabendo que os termos no ponto (i,j) já estão determinados pelos perfis anteriores de $q_{i,j}$ e pelo perfil já calculado de $u_{i+1,j}$, obtêm-se,

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{V_{i+1,j} + V_{i,j}}{4(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{EQ_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \right] q_{i+1,j+1} + \left[\frac{-(CSI_{i,j} + CSI_{i+1,j})(u_{i,j} + u_{i+1,j})}{4\Delta \xi} \right] \\
&+ \left[\frac{(u_{i,j} + u_{i+1,j})(PRES_{i,j} + PRES_{i+1,j})}{4} + \frac{EQ_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} + \frac{EQ_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \right] q_{i+1,j} \\
&+ \left[-\frac{(V_{i+1,j} + V_{i,j})}{4(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{EQ_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \right] q_{i+1,j-1} = DQJ \quad (D.38)
\end{aligned}$$

de um modo mais simplificado, conhecido os valores multiplicativos entre colchetes, a equação (D.38) pode ser escrita na seguinte forma,

$$AQJ q_{i+1,j+1} + BQJ q_{i+1,j} + CQJ q_{i+1,j-1} = DQJ \quad (D.39)$$

4. EQUAÇÃO DA TAXA DE DISSIPACÃO

Tendo por base a equação adimensional (3.11), é obtida a expressão,

$$CSI u \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mathcal{E} \mathcal{D} \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \eta} \right) - 2 \mathcal{P} \mathcal{D} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 - CSI(\mathcal{D} \mathcal{D}) - PRES(\mathcal{D} \mathcal{D} \mathcal{D}) \right) \quad (D.40)$$

Esta equação, sendo discretizada para um ponto $(i+1/2, j)$, e analisada termo a termo, permite obter,

$$CSI_{i+1/2, j} u_{i+1/2, j} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \xi} \Big|_{i+1/2, j} = \frac{(CSI_{i, j} + CSI_{i+1, j}) (u_{i, j} + u_{i+1, j})}{4} \left[\frac{(\mathcal{D}_{i+1, j} - \mathcal{D}_{i, j})}{\Delta \xi} \right] \quad (D.41)$$

$$\nu_{i+1/2, j} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2, j} = \frac{(\nu_{i+1, j} + \nu_{i, j})}{4} \left[\frac{(\mathcal{D}_{i+1, j+1} - \mathcal{D}_{i+1, j-1} - \mathcal{D}_{i, j+1} - \mathcal{D}_{i, j-1})}{(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \right] \quad (D.42)$$

$$2 \mathcal{P} \mathcal{D}_{i+1/2, j} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \Big|_{i+1/2, j} = \left[2 C_1 \frac{\epsilon m}{\nu q} \right]_{i+1/2, j} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \Big|_{i+1/2, j} \left[\frac{(\mathcal{D}_{i+1, j} + \mathcal{D}_{i, j})}{2} \right] \quad (D.43)$$

onde

$$\left[\frac{2 C_1}{q} \frac{\epsilon m}{\nu} \right]_{i+1/2, j} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \Big|_{i+1/2, j} = \frac{C_1 (EVIS_{i, j} + EVIS_{i+1, j})}{(q_{i, j} + q_{i+1, j})} \left[\frac{(u_{i, j+1} - u_{i, j-1} + u_{i+1, j+1} - u_{i+1, j-1})^2}{2 (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})^2} \right]$$

portanto,

$$2PD_{i+1/2,j} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{i+1/2,j}^2 = \frac{C_1 (EVIS_{i,j} + EVIS_{i+1,j})}{(q_{i,j} + q_{i+1,j})} \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1})}{2(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})^2} \left[\frac{(D_{i+1,j} + D_{i,j})}{2} \right] \quad (D.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(ED \frac{\partial D}{\partial \eta} \right)_{i+1/2,j} = \frac{ED_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} (D_{i+1,j+1} - D_{i+1,j} + D_{i,j+1} - D_{i,j}) - \frac{ED_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} (D_{i+1,j} - D_{i+1,j-1} + D_{i,j} - D_{i,j-1}) \quad (D.45)$$

$$CSI_{i+1/2,j} DD_{i+1/2,j} = \frac{(CSI_{i,j} + CSI_{i+1,j})}{(q_{i,j} + q_{i+1,j})} C_2 [(D_{i+1,j} + D_{i,j}) D_{i+1/2,j}] \quad (D.46)$$

$$PRES_{i+1/2,j} DDD_{i+1/2,j} = \frac{(CSI_{i,j} + CSI_{i+1,j})}{(u_{\infty,i+1} + u_{\infty,i})} \frac{(u_{\infty,i+1} - u_{\infty,i})}{\Delta \xi}$$

$$(u_{i,j} + u_{i+1,j}) (D_{i+1,j} + D_{i,j}) \quad (D.47)$$

Substituindo os termos na equação (D.40), reagrupando em termos de $D_{i+1,j}$, sabendo que os termos nos pontos (i,j) já estão determinados anteriormente e que os valores de $u_{i+1,j}$ e $q_{i+1,j}$ já foram calculados, onde DDJ é o somatório dos termos conhecidos, obtêm-se,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(V_{i+1,j} + V_{i,j})}{4(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{ED_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta\eta_j(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \right] D_{i+1,j+1} + \left[\frac{(CSI_{i,j} + CSI_{i+1,j})(u_{i,j} + u_{i+1,j})}{4\Delta\xi} \right. \\
& + \frac{ED_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta\eta_j(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{ED_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta\eta_{j-1}(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{C_1(EVIS_{i,j} + EVIS_{i+1,j})}{4(q_{i,j} + q_{i+1,j})} \frac{(u_{i,j+1} - \\
& u_{i,j-1} + u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1})^2}{(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{C_2(CSI_{i,j} + CSI_{i+1,j})}{(q_{i,j} + q_{i+1,j})} (D_{i+1/2,j}) + \\
& \left. \frac{(CSI_{i,j} + CSI_{i+1,j})}{(u_{\infty,i+1} + u_{\infty,i})} \frac{(u_{\infty,i+1} - u_{\infty,i})}{\Delta\xi} (u_{i,j} + u_{i+1,j}) \right] D_{i+1,j} + \\
& \left[-\frac{(V_{i+1,j} - V_{i,j})}{4(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{ED_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta\eta_{j-1}(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \right] D_{i+1,j-1} = DDJ
\end{aligned} \tag{D.48}$$

de um modo mais simplificado, conhecidos os valores multiplicativos dos $D_{i+1,j}$, entre colchetes, a equação (D.48) pode se escrita na seguinte forma,

$$ADJ D_{i+1,j+1} + BDJ D_{i+1,j} + CDJ D_{i+1,j-1} = DDJ \tag{D.49}$$

5. EQUAÇÃO DA ENERGIA

Tendo por base a equação adimensional (3.12), é obtida a

expressão,

$$\begin{aligned}
 & CSI \ u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + V \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\epsilon h \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) - EE\theta \left[\frac{dT_d}{d\xi} - \frac{dT_p}{d\xi} \right] - EE \frac{dT_p}{d\xi} + \\
 & 4EC(CSI)(D) + 2EC \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + 4EC \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - \frac{2EC}{CSIM} \frac{\partial^2 P}{\partial \eta \partial \eta} - \\
 & 2EC \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2EC}{u_\infty} \left[\frac{du_\infty}{d\xi} - \frac{nu_\infty}{\xi} \right] \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \eta} - \frac{6EC}{u_\infty} \left[\frac{du_\infty}{d\xi} - \frac{2}{3} \frac{nu_\infty}{\xi} \right] \frac{\partial F}{\partial \eta}
 \end{aligned} \tag{D.50}$$

Esta equação, sendo discretizada para um ponto $(i+1/2, j)$, e analisada termo a termo, permite obter,

$$CSI_{i+1/2, j} u_{i+1/2, j} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{i+1/2, j} = \frac{(CSI_{i+1, j} + CSI_{i, j}) (u_{i+1, j} + u_{i, j})}{4} \frac{(\theta_{i+1, j} - \theta_{i, j})}{\Delta \xi} \tag{D.51}$$

$$V_{i+1/2, j} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2, j} = \frac{(V_{i+1, j} + V_{i, j})}{4} \frac{(\theta_{i+1, j+1} - \theta_{i+1, j-1} + \theta_{i, j+1} - \theta_{i, j-1})}{(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \tag{D.52}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\epsilon h \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \Big|_{i+1/2, j} = \frac{EH_{i+1/2, j+1/2}}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} (\theta_{i+1, j+1} - \theta_{i+1, j} + \theta_{i, j+1} - \theta_{i, j}) -$$

$$\frac{EH_{i+1/2, j-1/2}}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} (\theta_{i+1, j} - \theta_{i+1, j-1} + \theta_{i, j} - \theta_{i, j-1}) \tag{D.53}$$

$${}^{EE}_{i+1/2,j} \left[\frac{dT_\delta}{d\xi} - \frac{dT_p}{d\xi} \right]_{i+1/2,j} \theta_{i+1/2,j} = \frac{({}^{EE}_{i,j} + {}^{EE}_{i+1,j}) [(T_{\delta i+1} - T_{\delta i}) - (T_{p i+1} - T_{p i})]}{4\Delta\xi} (\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}) \quad (D.54)$$

$${}^{EE}_{i+1/2,j} \left[\frac{dT_p}{d\xi} \right]_{i+1/2,j} = \frac{({}^{EE}_{i,j} + {}^{EE}_{i+1,j}) (T_{p i+1} - T_{p i})}{2\Delta\xi} \quad (D.55)$$

$$(4EC \text{ CSI } D)_{i+1/2,j} = 0,5 (EC_{i+1,j} + EC_{i,j}) (CSI_{i+1,j} + CSI_{i,j}) (D_{i,j} + D_{i+1,j}) \quad (D.56)$$

$${}^{2EC}_{i+1/2,j} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{i+1/2,j}^2 = (EC_{i+1,j} + EC_{i,j}) \left[\frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1})^2}{2(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})^2} \right] \quad (D.57)$$

$${}^{4EC}_{i+1/2,j} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial q}{\partial \eta} \right]_{i+1/2,j} = 2(EC_{i+1,j} + EC_{i,j}) \left[\frac{(q_{i+1,j+1} - q_{i+1,j-1} + q_{i,j+1} - q_{i,j-1})}{\Delta\eta_j (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{(q_{i+1,j} - q_{i+1,j} + q_{i,j} - q_{i,j-1})}{\Delta\eta_{j-1} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \right] \quad (D.58)$$

$${}^{2EC}_{i+1/2,j} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \right]_{i+1/2,j} = \frac{({}^{EC}_{i+1,j} + {}^{EC}_{i,j})}{\Delta\xi \Delta\eta_j \Delta\eta_{j+1}} \left[\Delta\eta_j (F_{i+1,j+1} - F_{i+1,j} - F_{i,j+1} + F_{i,j}) + \Delta\eta_{j+1} (F_{i+1,j} - F_{i+1,j-1} - F_{i,j} + F_{i,j-1}) \right] \quad (D.59)$$

$$\frac{2EC}{u_{\infty}} \left[\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{nu_{\infty}}{\xi} \right]_{i+1/2,j} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \eta} \Big|_{i+1/2,j} = \frac{2(EC_{i+1,j} + EC_{i,j})}{(u_{\infty_{i+1}} + u_{\infty_i})} \left[\frac{u_{\infty_{i+1,j}} - u_{\infty_i}}{\Delta \xi} - \right. \\ \left. \frac{n(u_{\infty_{i+1}} + u_{\infty_i})}{(\xi_{i+1} + \xi_i)} \right] \left[\frac{(F_{i+1,j+1} - F_{i+1,j} + F_{i,j+1} - F_{i,j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{(F_{i+1,j} - F_{i+1,j-1} + F_{i,j} - F_{i,j-1})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \right] \quad (D.60)$$

$$\frac{6EC}{u_{\infty}} \left[\frac{du_{\infty}}{d\xi} - \frac{2}{3} \frac{nu_{\infty}}{\xi} \right]_{i+1/2,j} \frac{\partial F}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2,j} = \frac{3(EC_{i+1,j} + EC_{i,j})}{(u_{\infty_{i+1}} + u_{\infty_i})} \left[\frac{u_{\infty_{i+1,j}} - u_{\infty_i}}{\Delta \xi} - \right. \\ \left. \frac{2}{3} \frac{n(u_{\infty_{i+1}} + u_{\infty_i})}{(\xi_{i+1} + \xi_i)} \right] \frac{(F_{i+1,j+1} - F_{i+1,j-1} + F_{i,j+1} - F_{i,j-1})}{(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \quad (D.61)$$

$$\frac{2EC}{CSII} \Big|_{i+1/2,j} \frac{\partial^2 P}{\partial \eta \partial \eta} \Big|_{i+1/2,j} = \frac{2(EC_{i+1,j} + EC_{i,j})}{(CSII_{i+1,j} + CSII_{i,j})} \left[\frac{(P_{i+1,j+1} - P_{i+1,j} + P_{i,j+1} - P_{i,j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \right. \\ \left. \frac{(P_{i+1,j} - P_{i+1,j-1} + P_{i,j} - P_{i,j-1})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \right] \quad (D.62)$$

Desta análise, obtêm-se que as equações de (D.55) a (D.62) são independente de θ , isto é, são funções de valores já conhecidos. Também os valores de θ nos pontos (i, j) formam um perfil já calculado. Assim, substituindo os termos na equação (D.50) e reagrupando-os em relação a $\theta_{i+1,j}$, chamando o somatório dos termos conhecidos de $\partial T J$, obtêm-se a seguinte expressão para a equação

da energia,

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{V_{i+1,j} + V_{i,j}}{4(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{EH_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta\eta_j(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \right] \theta_{i+1,j+1} + \left[\frac{(CSI_{i,j} + CSI_{i+1,j})(u_{i+1,j} + u_{i,j})}{4\Delta\xi} + \right. \\
 & \frac{EH_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta\eta_j(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{EH_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta\eta_{j-1}(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{(EE_{i+1,j} + EE_{i,j})}{4\Delta\xi} \left[(T_{\delta_{i+1}} - T_{\delta_i}) - \right. \\
 & \left. (T_{p_{i+1}} - T_{p_i}) \right] \theta_{i+1,j} + \left[-\frac{(V_{i+1,j} + V_{i,j})}{4(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{EH_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta\eta_{j-1}(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \right] \theta_{i+1,j-1} = DTJ
 \end{aligned}
 \tag{D.63}$$

De um modo mais simplificado, conhecidos os valores multiplicativos dos $\theta_{i+1,j}$, entre chaves, pode se escrever a equação (D.63) na seguinte forma,

$$ATJ \theta_{i+1,j+1} + BTJ \theta_{i+1,j} + CTJ \theta_{i+1,j-1} = DTJ \quad . \tag{D.64}$$

6. DISCRETIZAÇÃO DE TERMOS AUXILIARES

Sabendo que ξ é uma coordenada espacial do problema, independente de η , obtém-se,

$$\begin{aligned}
 CSI_{i+1/2,j} &= \left[\frac{(2\xi_{i+1}) + (2\xi_i)}{2} \right]^{2n} \\
 CSI_{i+1/2,j} &= (\xi_{i+1} + \xi_i)^{2n}
 \end{aligned}
 \tag{D.65}$$

$$EM_{i+1/2} = 0,25(EM_{i,j+1} + EM_{i,j} + EM_{i+1,j+1} + EM_{i+1,j}) \quad (D.66)$$

$$EM_{i+1/2,j-1/2} = 0,25(EM_{i,j} + EM_{i,j-1} + EM_{i+1,j} + EM_{i+1,j-1}) \quad (D.67)$$

$$EQ_{i+1/2,j+1/2} = 0,25(EQ_{i,j+1} + EQ_{i,j} + EQ_{i+1,j+1} + EQ_{i+1,j}) \quad (D.68)$$

$$EQ_{i+1/2,j-1/2} = 0,25(EQ_{i,j} + EQ_{i,j-1} + EQ_{i+1,j} + EQ_{i+1,j-1}) \quad (D.69)$$

$$ED_{i+1/2,j+1/2} = 0,25(ED_{i,j+1} + ED_{i,j} + ED_{i+1,j+1} + ED_{i+1,j}) \quad (D.70)$$

$$ED_{i+1/2,j-1/2} = 0,25(ED_{i,j} + ED_{i,j-1} + ED_{i+1,j} + ED_{i+1,j-1}) \quad (D.71)$$

$$EH_{i+1/2,j+1/2} = 0,25(EH_{i,j+1} + EH_{i,j} + EH_{i+1,j+1} + EH_{i+1,j}) \quad (D.72)$$

$$EH_{i+1/2,j-1/2} = 0,25(EH_{i,j} + EH_{i,j-1} + EH_{i+1,j} + EH_{i+1,j-1}) \quad (D.73)$$

$$PRM_{i+1/2,j} = \left[1 - \left[\frac{(u_{i+1,j} + u_{i,j})}{2} \right]^2 \right] \frac{2(\xi_{i+1} + \xi_i)^{2n}}{(u_{\infty,i+1} + u_{\infty,i})} \left[\frac{u_{\infty,i+1} - u_{\infty,i}}{\Delta \xi} \right] \quad (D.74)$$

$$EVIS_{i+1/2,j} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{i+1/2,j}^2 = \frac{(\epsilon m_{i+1,j} + \epsilon m_{i,j})}{2\nu} \left[\frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1})^2}{4(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})^2} \right] \quad (D.75)$$

$$EE_{i+1/2,j} = (u_{i,j} + u_{i+1,j}) \left[\frac{(\xi_{i+1} + \xi_i)^{2n}}{2DTEM_{i+1/2,j}} \right] \quad (D.76)$$

$$EC_{i+1/2,j} = \frac{\left[(u_{\infty i+1} + u_{\infty i}) / 2 \right]^2}{Cp \, DTEM_{i+1/2,j}} \quad (D.77)$$

$$DTEM_{i+1/2,j} = 0,5 \left[(T_{\delta i+1} + T_{\delta i}) - (T_{p i+1} + T_{p i}) \right] \quad (D.78)$$

Para as funções auxiliares, $F(\xi, \eta)$ e $P(\xi, \eta)$, que aparecem na equação (D.50), tem-se as seguintes expressões discretizadas,

$$F_{i,j} = \frac{\epsilon m_{i,j}}{v} \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})}{(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \quad (D.79)$$

$$P_{i,j} = \frac{\epsilon m_{i,j}}{v} \frac{(v_{i,j+1} - v_{i,j-1})}{(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \quad (D.80)$$

A P Ê N D I C E E

PERFIS DAS VARIÁVEIS NUM PONTO x_0

Tendo em vista tratar-se o problema de um caso parabólico, é necessário se conhecer o perfil das variáveis em estudo num ponto x_0 , possibilitando a solução do problema a partir de tal ponto.

Com base em Cebeci & Smith (4), os perfis de energia cinética turbulenta no ponto x_0 , para os casos em estudo, que são,

- a) caso 1100 - gradiente de pressão adverso
- b) caso 1200 - gradiente de pressão fortemente adverso
- c) caso 1300 - gradiente de pressão favorável

d) caso 1400 - gradiente de pressão nulo - placa plana, estão dados na tabela I. Os valores da velocidade do escoamento potencial ao longo do escoamento e sua derivada estão dados na tabela II, para os casos 1100, 1200 e 1300. Para a placa plana, caso 1400, temos,

$$u_{\infty}(x) = 33,00(m/s) \quad (E.1)$$

O perfil da dissipação da energia cinética turbulenta no ponto x_0 é obtida, segundo Rotta (20), pela expressão,

$$\mathcal{D} = (1/0,82y^+) (u^*/u_{\infty})^4 \quad (E.2)$$

Para a temperatura, tem-se os perfis, por analogia com o perfil de velocidade,

$$\theta_{1,j} = u_{1,j} \quad (\text{E.3})$$

ou, segundo Kays (10), pelo perfil exponencial,

$$\theta_{1,j} = (y/\delta)^{1/7} \quad (\text{E.4})$$

Estes perfis foram processados no modelo numérico para se analisar a convergência do algoritmo desenvolvido.

Os perfis iniciais de velocidade, no ponto x_0 , $u_{1,j}$, serão, segundo Cebeci & Smith (4),

A) Para placa plana:

Para os intervalos $0,0 \leq y \leq 0,1$ (cm)

$$u_{1,j} = 37,24238y - 860,79048y^2 + 9119,04762y^3 - 35523,8095y^4 \quad (\text{E.5})$$

$0,1 \leq y \leq 0,4$ (cm)

$$u_{1,j} = 0,599 + 0,90833y - 0,69999y^2 + 0,16666y^3 \quad (\text{E.6})$$

$0,4 \leq y \leq 0,7$ (cm)

$$u_{1,j} = 0,533 + 1,16666y - 0,99999y^2 + 0,33333y^3 \quad (\text{E.7})$$

$y \geq 0,7$ (cm)

$$u_{1,j} = -0,09 + 3,45666y - 3,7y^2 + 1,33333y^3 \quad (\text{E.8})$$

B) Para o caso 1100:

Para os intervalos $0,0 \leq y \leq 0,05$

$$u_{1,j} = 26,185y - 451,4y^2 + 2634,0y^3 \quad (\text{E.9})$$

$0,05 \leq y \leq 1,0$

$$u_{1,j} = 0,4662 + 0,95563y - 1,66714y^2 + 1,52079y^3 - 0,50841y^4 \quad (\text{E.10})$$

$y \geq 1,0 \text{ (cm)}$

$$u_{1,j} = 0,60715 + 0,15897y + 0,013925y^2 + 0,015474y^3 + 0,0025695y^4 - 0,000135y^5 \quad (\text{E.11})$$

C) Para o caso 1200:

Para os intervalos $0,0 \leq y \leq 0,05 \text{ (cm)}$

$$u_{1,j} = 25,896y - 449,44y^2 + 2686,4y^3 \quad (\text{E.12})$$

$0,05 \leq y \leq 0,8 \text{ (cm)}$

$$u_{1,j} = 0,44368 + 1,44111y - 3,78853y^2 + 4,77486y^3 - 2,1387y^4 \quad (\text{E.13})$$

$y \geq 0,8 \text{ (cm)}$

$$u_{1,j} = 0,60793 + 0,154459y + 0,037314y^2 - 0,027862y^3 + 0,00483y^4 - 0,0002726y^5 \quad (\text{E.14})$$

D) Para o caso 1300:

Para os intervalos $0,0 \leq y \leq 0,05$ (cm)

$$u_{1,j} = 19,15773y - 85,10928y^2 - 1152,9072y^3 \quad (\text{E.15})$$

$0,05 \leq y \leq 0,4$ (cm)

$$u_{1,j} = 0,68801 - 0,18454y + 2,00679y^2 + 2,40916y^3 - 10,40915y^4 \quad (\text{E.16})$$

$0,4 \leq y \leq 0,7$ (cm)

$$u_{1,j} = 1,131 - 1,17y + 4,7y^2 - 3,0y^3 \quad (\text{E.17})$$

$0,7 \leq y \leq 1,0$ (cm)

$$u_{1,j} = 0,976 + 6,125y - 6,7y^2 + 2,5y^3 \quad (\text{E.18})$$

$y \geq 1,0$ (cm)

$$u_{1,j} = 0,739999 + 0,334y - 0,147y^2 + 0,022y^3 \quad (\text{E.19})$$

Outros valores no ponto x_0 de início da computação do programa são dados abaixo,

$$q_{\infty,0} = 0,1 \times 10^{-4}$$

$$D_{\infty,0} = 0,1 \times 10^{-9}$$

$$\Delta\eta_1 = 0,005$$

$$BK = 1,03$$

$$\alpha_v = 0,0006$$

$$\alpha_c = 0,01$$

$$\alpha_T = 0,0006$$

$$T_{P,0} = 302 \text{ K}$$

$$T_{b,0} = 629 \text{ K}$$

DIST. ENERGIA CINETICA			
PLACA PLANA		CASOS 1100 - 1200 - 1300	
y/δ	$\bar{q}/(u_\infty)^2$	y/δ	$\bar{q}/(u_\infty)^2$
0,05	7,80	0,001	1,000
0,10	6,95	0,0025	3,460
0,15	6,50	0,005	4,869
0,20	6,00	0,01	5,997
0,25	5,60	0,02	5,063
0,30	5,20	0,04	4,315
0,35	4,90	0,06	4,038
0,40	4,50	0,08	3,904
0,45	4,00	0,10	3,770
0,50	3,50	0,15	3,490
0,55	3,00	0,20	3,225
0,60	2,55	0,30	2,829
0,65	2,10	0,40	2,411
0,70	1,80	0,50	1,992
0,75	1,48	0,60	1,462
0,80	1,00	0,70	0,913
0,85	0,61	0,80	0,439
0,90	0,43	0,90	0,247
0,95	0,22	0,95	0,111

TABELA E.1

DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA
CINETICA TURBULENTA.

SEGUNDO HINZE (8)

TABELA E.2 : VELOCIDADE POTENCIAL						
X	CASO 1100		CASO 1200		CASO 1300	
	$U_{\infty}(x)$	$\frac{d U_{\infty}}{d x}$	$U_{\infty}(x)$	$\frac{d U_{\infty}}{d x}$	$U_{\infty}(x)$	$\frac{d U_{\infty}}{d x}$
1,282	32,60	- 3,35	31,20	- 4,15	13,38	4,00
1,582	30,75	- 4,00	29,65	- 4,15	14,80	4,20
1,882	30,25	- 4,25	28,40	- 4,15	16,00	4,40
2,182	29,05	- 3,70	27,18	- 4,15	17,40	4,60
2,482	28,00	- 3,30	26,10	- 4,15	18,80	4,76
2,782	27,00	- 3,00	24,82	- 4,15	20,20	4,90
3,082	26,10	- 2,76	23,60	- 3,95	21,70	5,00
3,382	25,35	- 2,55	22,80	- 2,62	23,20	5,00
3,682	24,60	- 2,40	22,25	- 0,80	24,60	4,90
3,982	23,95	- 2,30	22,30	0,80	26,00	4,50
4,282	23,25	- 2,20	22,80	2,75	27,50	3,65

$U_{\infty}(x)$ [m/s]

$\frac{d U_{\infty}(x)}{d x}$ [s^{-1}]

A P Ê N D I C E F

PARÂMETROS AUXILIARES

1. FLUXO DE CALOR

Segundo White (28), para um escoamento turbulento, o fluxo de calor na parede é obtido pela seguinte expressão,

$$q_x(x) = -\rho C_p (\alpha + \epsilon h) \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (F.1)$$

A forma adimensional da equação (F.1), segundo os parâmetros ξ e η , será,

$$q_x^*(\xi) = -\rho C_p \left[\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\epsilon h}{\nu} \right] \frac{U_\infty DTEM}{(2\xi)^n} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (F.2)$$

Esta equação discretizada para o ponto $i+1/2, j$, segundo o algoritmo usado, resulta em,

$$q_x^*_{i+1/2, j} = \frac{-\rho C_p (U_{\infty i+1} + U_{\infty i})}{2(\xi_{i+1} + \xi_i)^n} \left[EH_{i+1/2, j} DTEM_{i+1/2, j} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \right]_{i+1/2, j} \quad (F.3)$$

Na equação (F.3), o gradiente de temperatura é expresso por,

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad_{i+1/2, j} = \frac{\theta(2, 2)}{DELN1} \quad (F.4)$$

2. COEFICIENTE DE CONVECÇÃO TÉRMICA

Através do fluxo de calor, obtêm-se o coeficiente de convecção térmica na parede, segundo Kays (10), pela expressão,

$$h_x = \frac{q_x}{(T_f - T_p)} \quad (\text{F.5})$$

3. COEFICIENTE DE FRICÇÃO

Pela definição do coeficiente de fricção, tem-se,

$$C_{f_x} = \frac{\tau_p}{\rho u_\infty^2 / 2} \quad (\text{F.6})$$

Usando a velocidade de fricção,

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$$

obtêm-se a seguinte expressão,

$$C_{f_x} = 2 \left(\frac{u^*}{u_\infty} \right)^2 \quad (\text{F.7})$$

Segundo White (28), o coeficiente de fricção para a placa plana pode ser obtido pela expressão,

$$C_{f_x} = 0,0592 Re_x^{-0,2} \quad (\text{F.8})$$

Segundo Ludwig e Tillmann (25), pode ser usada a seguinte expressão,

$$C_{f_x} = 0,246 Re_{\theta 1}^{-0,268} H^{-0,678} \quad (F.9)$$

4. FATOR DE FORMA

Pela definição do fator de forma, tem-se,

$$H = \frac{\delta^*}{\theta 1} \quad (F.10)$$

Nesta equação, a espessura de deslocamento δ^* e a espessura de quantidade de movimento $\theta 1$ são obtidas por,

$$\delta^* = \int_0^\delta \frac{u_\infty - u}{u_\infty} dy \quad (F.11)$$

$$\theta 1 = \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty} \right) dy \quad (F.12)$$

5. VISCOSIDADE TURBULENTA

Com o uso da hipótese de Van-Driest, será calculada a viscosidade turbulenta, ϵm_h , como comparativo com a hipótese usada neste trabalho, ϵm .

Para a região próxima a parede, tem-se,

$$\varepsilon_p = K_p^2 y^2 \left[1 - e^{-(y/A)} \right]^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{F.13})$$

Nesta expressão,

$$A = 26\nu/u^* \quad (\text{F.14})$$

$$u^* = (\tau_p/\rho)^{1/2} \quad (\text{F.15})$$

$$u^+ = u u_\infty / u^* \quad (\text{F.16})$$

$$y^+ = y u^* / \nu \quad (\text{F.17})$$

A introdução destas expressões em (F.13) leva a,

$$\frac{\varepsilon_p}{\nu} = \frac{K_p^2 (y^+)^2}{(2\xi)^n} \frac{1}{u^*} \left[1 - e^{-(y^+/26)} \right]^2 \frac{\partial u^+}{\partial \eta} \quad (\text{F.18})$$

Na equação (F.18), $K_p = 0,4$.

Para a região afastada da parede, tem-se,

$$\varepsilon_0 = K_0 u_\infty \delta^* \Gamma \quad (\text{F.19})$$

Nesta expressão, Γ , é o fator de intermitência, que, segundo Klebanoff (34) é obtido por,

$$\Gamma = \frac{1}{\left[1 + 5,5 (y/y\delta)^6 \right]} \quad (\text{F.20})$$

Introduzindo a equação (F.20) e a equação (F.11) em (F.19) ,
obtem-se,

$$\frac{\varepsilon_0}{\nu} = \frac{K_0 (2\xi)^n}{\left[1 + 5,5 (\eta/\eta_{MAX})^6\right]} \int_0^{\eta_\delta} (1-u) d\eta \quad (F.21)$$

Na equação (F.21), $K_0 = 0,0168$

A viscosidade turbulenta, $\varepsilon_{m_\mathcal{H}}$, é, então:

$$\text{para } \frac{\varepsilon_0}{\nu} > \frac{\varepsilon_p}{\nu} , \quad \varepsilon_{m_\mathcal{H}} = \frac{\varepsilon_p}{\nu} \quad (F.22)$$

$$\text{para } \frac{\varepsilon_0}{\nu} < \frac{\varepsilon_p}{\nu} , \quad \varepsilon_{m_\mathcal{H}} = \frac{\varepsilon_0}{\nu} \quad (F.23)$$

A P Ê N D I C E G

NÚMEROS CARACTERÍSTICOS

1. REYNOLDS

O número de Reynolds é o seguinte grupo adimensional,

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \quad (G.1)$$

Nesta expressão, x pode ser substituído por δ , δ^* e θ_1 , se obtendo o número de Reynolds com base nas características citadas.

2. NUSSELT

Por definição, através da análise dimensional, se denominou de número de Nusselt ao seguinte grupo adimensional,

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k_f} \quad (G.2)$$

Conforme Kays (10), é válida a seguinte expressão para se obter o número de Nusselt num escoamento turbulento,

$$Nu_x = 0.0288 Pr_t^{0,3} Re_x^{0,8} \quad (G.3)$$

3. STANTON

Por definição, através da análise dimensional, denominou-se de número de Stanton ao seguinte grupo adimensional,

$$St_x = \frac{h_x}{\rho C_p u_\infty} \quad (G.4)$$

Segundo Kays (10), é válida a seguinte expressão para um escoamento turbulento,

$$St_x = 0,0295 Re_x^{-0,2} Pr_t^{-0,4} \quad (G.5)$$

Segundo White (28), é válida a expressão,

$$St_x = \frac{Cf_x}{2Pr_t^{0,4} (T_p/T_f)^{0,4}} \quad (G.6)$$

Pela analogia de Reynolds, tem-se,

$$St_x = \frac{Cf_x}{2} \quad (G.7)$$